ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1980, № 2

УДК 519.48

Н. И. ДУБРОВИН

ЦЕПНЫЕ ОБЛАСТИ

Все кольца предполагаются ассоциативными и, если не оговорено противное, с единицей. Кольцо R называется цепным справа, если его правые идеалы линейно упорядочены по включению. Цепным называется кольцо, цепное справа и слева. Цепные коммутативные области — это не что иное, как кольца нормирования (см. [1], глава VI, § 1).

В настоящей работе строится пример простой радикальной цепной области (без единицы), что положительно решает одну из проблем Брунгса (см. [2], проблема 1). Кроме того, для цепных областей доказывается аналог малой теоремы об аппроксимации (см. [1], глава VI, § 7).

Используемые в дальнейшем определения правой (левой) системы Оре, локализации по системе Оре; понятие порядка, понятие кольца Безу можно найти, например, в книгах [3] или [4]. Через $J(R)$, $U(R)$ будем обозначать радикал Джекобсона и множество обратимых элементов кольца R соответственно.

Лемма 1. Пусть кольцо D содержит подкольцо R, которое, в свою очередь, является локализацией своего подкольца S по некоторой левой системе Оре регулярных элементов. Тогда отображение $\varphi: D \to D \otimes_S R$, для которого $\varphi(d) = d \otimes 1$, является изоморфизмом правых R-модулей, обратным к которому будет отображение $\psi: D \otimes \otimes_S R \to D$, где

$$\psi(\Sigma d_i \otimes q_i) = \Sigma d_i q_i.$$

Доказательство. Достаточно доказать равенство $d \otimes r = dr \otimes 1$ для произвольных элементов $d \in D$, $r \in R$.

Пусть элемент $s \in S$, таков, что $sr \in S$ и $s \in U(R)$. Тогда

$$d \otimes r = ds^{-1} s \otimes r = ds^{-1} \otimes sr = ds^{-1} sr \otimes 1 = dr \otimes 1.$$

Теперь легко проверить, что φ, ψ — взаимно-обратные гомоморфизмы.

Лемма 2. Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — цепные области в общем теле частных D, такие, что $R_i \not\subseteq R_j$ при $i \neq j$. Тогда найдутся элементы $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ тела D, такие, что $\varepsilon_i \in J(R_j)$ при $i \neq j$ и $\varepsilon_i \in U(R_i)$.

Доказательство. Докажем индукцией по числу n следующее соотношение:

$$R_1 \not\subseteq R_2 \cup \ldots \cup R_n. \tag{1}$$

Для $n=2$ это соотношение выполняется по условию. Пусть для $n-1$ соотношение (1) доказано, докажем его для n. Выберем элемент $r \in R_1 \setminus (R_2 \cup \ldots \cup R_{n-1})$ согласно предположению индукции и возьмем

$s\in R_1\setminus R_n$. Тогда $r+s^m\in R_1\setminus(R_2\cup\ldots\cup R_n)$ для некоторого натурального числа m. Действительно, предположив противное, получим, что существуют два различных натуральных числа k и l, таких, что $r+s^l\in\in R_i$, $r+s^k\in R_i$, где $i\in\{2, \ldots, n\}$. При этом можно считать, что $i\neq n$, так как иначе $r+s^l\in R_n$ и $s^l\notin R_n$. Отсюда следует, что $r\notin R_n$ и соотношение (1) доказано. Далее, $s^l-s^k=(r+s^l)-(r+s^k)\in R_i$, что из двух возможностей $s\in R_i$ и $s^{-1}\in R_i$ оставляет место первой. Отсюда $s^l\in R_i$, и вместе с включением $r+s^l\in R_i$ это приводит к противоречию $(r\in R_i)$ с выбором r. Итак, соотношение (1) доказано. Пусть $\eta_1\in R_1\setminus(R_2\cup\ldots\cup R_n)$. Если $\eta_1\in U(R_1)$, то полагаем $\varepsilon_1=\eta_1^{-1}$. Если же $\eta_1\in\in R_1\setminus U(R_1)=J(R_1)$, то положим $\varepsilon_1=(1+\eta_1)^{-1}$. И в том и в другом случаях легко проверить, что $\varepsilon_1\in U(R_1)$ и $\varepsilon_1\in J(R_i)$ для $i=2, \ldots, n$.

Предложение 3. Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — цепные области в общем теле частных D, такие, что $R_i\not\subseteq R_j$ при $i\neq j$. Тогда:
1) $S=R_1\cap\ldots\cap R_n$ — кольцо Безу, имеющее D своим (классическим) телом частных;
2) максимальные правые (левые) идеалы кольца S исчерпываются идеалами $M_i=S\cap J(R_i)$, $i=1, \ldots, n$;
3) множество $C(M_i)=S\setminus M_i$ является правой и левой системой Оре, локализация по которой кольца S совпадает с R_i.

Доказательство. 1. Достаточно доказать, что для любого элемента $a\in D$ найдется такой элемент $b\in D$, что $S+aS=bS$. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — система элементов, построенная в лемме 2, и $i_1, \ldots, i_s$ — все натуральные числа i из отрезка $[1, n]$, такие, что $a\in J(R_i)$. Тогда элемент $b=a+\varepsilon_{i_1}+\ldots+\varepsilon_{i_s}$ искомый, ибо $bS_i\supseteq S_i$ для любого $i=1, \ldots, n$.
2. Пусть I — произвольный правый идеал кольца S. Предположим, что I не содержится ни в каком из идеалов M_i, то есть для любого $i=1, \ldots, n$ найдется элемент $\eta_i\in I\setminus M_i$. Тогда элемент $\varepsilon=\sum\limits_{i=1}^{i=n}\eta_i\varepsilon_i$ принадлежит правому идеалу I и $\varepsilon R_i=R_i$ для любого $i=1, \ldots, n$. Но последнее условие обозначает, что

$$\varepsilon\in U(R_1)\cap\ldots\cap U(R_n)=U(S), \text{ и поэтому } I=S.$$

3. Ясно, что $S\setminus M_i\subseteq U(R_i)$; поэтому достаточно доказать, что для любого $r\in R_i$ найдется элемент $s\in C(M_i)$, такой, что $sr\in S$. В силу пункта 1 настоящего предложения $S+rS=aS$ для некоторого $a\in R$. Элемент $s=a^{-1}$ искомый.

Определение. Скажем, что две цепные области R_1 и R_2 в общем теле частных D независимы, если $R_1dR_2=D$ для любого ненулевого $d\in D$. Нетрудно проверить, что это равносильно тому, что R_1 и R_2 не являются эквивалентными порядками в теле D.

В коммутативном случае это определение совпадает с хорошо известным классическим понятием (см. [1], глава VI, § 7).

Теорема 4. Пусть $R_1, \ldots, R_n$ — попарно независимые цепные области в теле частных D. Тогда для любых ненулевых элементов $d_1, \ldots, d_n\in D$ и произвольных элементов $a_1, \ldots, a_n\in D$ имеет место соотношение

$$(a_1+d_1R_1)\cap(a_2+d_2R_2)\cap\ldots\cap(a_n+d_nR_n)\neq\varnothing. \qquad (2)$$

Доказательство. Обозначим $S=R_1\cap\ldots\cap R_n$. Можно считать, что $R_i\neq D$ при $i=1, \ldots, n$. В силу предложения 3 кольцо S — левый порядок в D. Поэтому, умножая соотношение (2) на подходящий ненулевой элемент из R, можно считать, что $a_i \in S$, $d_i \in S$ для $i=1, \ldots, n$. Но тогда соотношение (2) следует из эпиморфности канонического гомоморфизма

$$S \to \prod_{i=1}^{i=n} S/d_iR_i \cap S.$$

Это мы теперь и докажем по индукции. Обозначим

$$J = \bigcap_{i=2}^{i=n} (d_iR_i \cap S), \quad I = d_1S_1 \cap R + J.$$

Предположим, что $I \neq R$. Тогда в силу пункта 2 предложения 3 $I \subseteq M_i$ для некоторого i. Используя лемму 1 (с заменой R на R_i) и тот факт, что любой модуль без кручения над областью Безу плоский (см. [4], § 5.4, предложение 5), получаем в силу независимости колец нормирования $R_1, \ldots, R_n$, что

$$J(R_i) \supseteq IR_i = \varphi(I \otimes_S R_i) =$$

$$= \varphi\left[(d_1R_1 \otimes_S R_i) \cap (S \otimes_S R_i) + \bigcap_{j=2}^{j=n} (d_jR_j \otimes_S R_i) \cap (S \otimes_S R_i)\right] =$$

$$= d_1R_1R_i \cap SR_i + \bigcap_{j=2}^{j=n} (d_jR_jR_i \cap SR_i) = R_i.$$

Полученное противоречие показывает, что $I = R$. Следовательно,

$$S/(d_1R_1 \cap S) \cap J \cong S/d_1R_1 \cap S \oplus S/J.$$

Остается применить индуктивное предположение.

Перейдем теперь к построению примера простой радикальной цепной области. Пусть G — группа, построенная в [5, § 3]. Напомним, что

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} k & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| k, a \in \mathbf{Q};\ k > 0 \right\},$$

где $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел. Элемент $\begin{pmatrix} k & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ группы G будем записывать более удобным способом — (k, a). Если ε — положительное иррациональное число, то множество P элементов (k, a) группы G, таких, что $k + a\varepsilon \geqslant 1$, будет конусом положительных элементов, то есть отношение $g_1 \geqslant g_2 \Leftrightarrow g_1g_2^{-1} \in P$ превращает G в линейно право-упорядоченную группу (см. [5], § 1). Подгруппа $H = \{(1, a) \mid a \in \mathbf{Q}\}$ группы G изоморфна аддитивной группе рациональных чисел с естественным порядком. В силу того что группа G изоморфна полупрямому произведению подгруппы H и фактор-группы G/H, которая, в свою очередь, изоморфна мультипликативной группе положительных рациональных чисел, групповое кольцо $K[G]$, где K — произвольное тело, будет правой и левой областью Оре (см. [3], § 0.8, предложение 8.4). Отсюда получаем, что множество элементов полугруппового кольца $K[P]$, не лежащих в максимальном идеале $M = \sum_{g>e} gK[P]$, является правой и левой системой Оре. Локализацию кольца $K[P]$ по этой системе Оре обозначим через R. Так как группа G линейно правоупорядочена, то кольцо R будет цепной областью. Докажем, что $J(R)$ — простое кольцо.

Про подгруппу H группы G известно (см. [5], § 3), что для любого элемента $(k, a) \in P$ найдутся элементы $(1, x)$ и $(1, y)$, такие, что $(1, x) > (k, a) > (1, y) \geqslant (1, 0)$. Поэтому достаточно доказать равенство $J(R)(1, x)J(R) = J(R)$ для любого положительного элемента $(1, x)$. Это следует, в свою очередь, из такого замечания: для любых элементов $(1, x) > (1, y) > (1, 0)$ найдутся такие положительные элементы (k_1, a_1), (k_2, a_2) группы G, что $(k_1, a_1)(1, x)(k_2, a_2) < (1, y)$. Действительно, полагая $k_1 = k_2^{-1}$, $a_i' = (1 - k_i)/\varepsilon$ $(i = 1, 2)$, будем иметь

$$(k_1, a_1')(1, x)(k_2, a_2') = (1, k_1 x), \tag{3}$$

если выберем k_1 достаточно малым. Осталось взять рациональные числа a_1, a_2 столь близкими к a_1', a_2', чтобы выполнялось неравенство $k_i + a_i\varepsilon > 1$ $(i = 1, 2)$ и (3) оставалось в силе.

Радикальность кольца $J(R)$ очевидна. Теперь заметим, что если K — поле из двух элементов, то $J(R)$ — однорядная область (без единицы). Действительно, в этом случае правый (левый) идеал кольца $J(R)$, порожденный произвольным элементом a, совпадает с aR (Ra). Итак, если K — поле из двух элементов, то R — простая радикальная цепная область.

Автор благодарен А. В. Михалёву за внимание, проявленное к этой работе.

N. I. Dubrovin

CHAIN DOMAINS

The paper deals with the chain domains. An example of simple, radical chain domain is constructed. Another result is an analogue of the classical Small Approximation Theorem.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М., 1971.
2. Brungs H. H., Törner E. L. Chain rings and prime ideals. — Arch. Math., 1976, 27, N 3, 253—260.
3. Кон П. Свободные кольца и их связи. М., 1977.
4. Ламбек И. Кольца и модули. М., 1972.
5. Смирнов Д. М. Правоупорядоченные группы. — Алгебра и логика, 1966, **5**, вып. 6, 41—59.

Поступила в редакцию
08.09.78