ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ. СЕМЕСТР 2

Н.И. Дубровин

11 марта 2020 г.

Оглавление

1 ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ 5

1.1 Функции двух, трех переменных 5

1.2 Предел и непрерывность функции двух переменных 6

1.3 Частные производные 8

1.4 Дифференциал 9

1.4.1 Достаточное условие дифференцируемости 11

1.5 Производная сложной функции 12

1.6 Неявные функции 13

1.7 Градиент. Производная по направлению 14

1.8 Формула Тейлора 16

1.9 Экстремумы 17

2 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ 21

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл 21

2.2 Замена переменной в неопределённом интеграле 25

2.2.1 Метод интегрирования функций вида $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ и $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. 26

2.3 Интегрирование по частям в неопределённом интеграле 27

2.4 Интегрирование рациональных дробей 28

2.4.1 Метод интегрирования простейших дробей 4 типа. 31

2.5 Интегрирование иррациональных выражений 32

2.6 Интегрирование тригонометрических выражений 33

3 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ 35

3.1 Определенный интеграл Римана 35

3.1.1 Суммы Дарбу 39

3.2 Формула Ньютона-Лейбница 41

3.3 Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле . 42

3.4 Несобственные интегралы 43

3.4.1 Абсолютная сходимость 46

3.5 Интегралы, зависящие от параметра 48

3.5.1 Гамма-функция Эйлера 48

3.6 Приложение определённого интеграла к вычислению геометрических величин 50

3.6.1 Площадь плоской фигуры 50

3.6.2 Вычисление глобальных величин с помощью формулы Ньютона-Лейбница 52

3.6.3 Площадь криволинейного сектора 52

3.6.4 Объём тела 53

3.7 Длина дуги 55

3.8 Приложение определённого интеграла к вычислению физических величин 57

3.8.1 Длина пути 57

3.8.2 Работа силы 58

3.8.3 Статистические моменты и центр тяжести 58

3.8.4 Момент инерции 59

3.8.5 Масса тяжелой нити 60

4 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДИФФ. УРАВНЕНИЙ 61

4.1 Основные понятия теории дифференциальных уравнений 61

4.2 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям 64

4.2.1 Уравнение размножения и гибели. 64

4.2.2 Уравнение движения точки на оси 66

4.2.3 Форма прожектора 67

4.2.4 Задачи, приводящие к системе дифференциальных уравнений 68

4.3 Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка 68

4.4 Приближенное решение дифференциальных уравнений 69

4.4.1 Метод Эйлера 69

4.5 Уравнения с разделяющимися переменными 70

4.6 Однородные уравнения 71

4.7 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 72

4.7.1 Уравнение Бернулли 73

4.8 Уравнение в полных дифференциалах 74

4.9 Дифференциальные уравнения высших порядков 76

4.9.1 Геометрическая интерпретация уравнения второго порядка 76

4.9.2 Закон сохранения энергии 76

4.10 Неполные уравнения высших порядков 77

5 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 80

5.1 Линейные дифференциальные уравнения. 80

5.2 Линейные однородные дифф. уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 83

5.3 Линейные д. однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами 84

5.4 Неоднородные линейные уравнения второго порядка. 86

5.4.1 Метод вариации постоянных 86

5.5 Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 87

5.6 Неоднородные линейные уравнения высших порядков 89

5.6.1 Дифференциальное уравнение механических колебаний 91

5.6.2 Вынужденные колебания 92

5.7 Системы линейных уравнений 93

5.7.1 Метод исключения 93

5.8 Линейные системы с постоянными коэффициентами 94

Глава 1

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1 Функции двух, трех переменных

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ сопоставляет каждой точке $P(x, y)$ некоторой области D на плоскости число z по какому-либо закону. Примеры: 1) $z = xy$ – площадь прямоугольника со сторонами x, y. Здесь область D задается неравенствами $x > 0, y > 0$. 2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от точки $P(x, y)$ до начала координат. Здесь – любая точка и D – вся плоскость Oxy. 3) Угол φ который образует вектор $\overrightarrow{OP}$ с осью Ox; здесь ОДЗ$\varphi(x, y) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$.

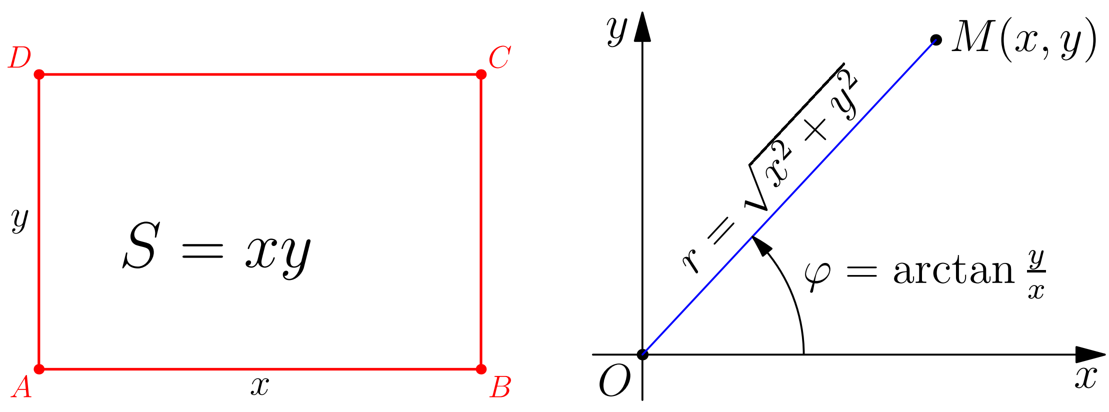


Рис. 1.1: Функции двух переменных

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется поверхность в пространстве $Oxyz$, состоящая из точек $P(x, y, z)$ таких, что $z = f(x, y)$ и (x, y) пробегает всю область допустимых значений функции f.

Нарисуем графики функций $z = x^2 + y^2$ (параболоид вращения) и $z = 1 - x - y$ – плоскость.

Естественной областью определения функции двух переменных, заданной аналитически, называется множество точек $P(x, y)$ на плоскости таких, что при подстановке пары (x, y) в аналитическое выражение все операции определены. Например, ОДЗ($z = \ln(36 - 4x^2 - 9y^2)$) задается неравенством $4x^2 + 9y^2 < 36$. Это неравенство задает внутренность эллипса с полуосями 3 и 2.

Линия уровня C функции двух переменных $z = f(x, y)$ задается уравнением $C = f(x, y)$. Например, линии уровня C функции $z = x^2 + y^2$ не пусты лишь, если $C \geq 0$ и представляют собой концентрические окружности радиуса $\sqrt{C}$ с центром в начале координат. Линии уровня функции $z = 2x - 3y$ – пучёк прямых, параллельных прямой $y = 2x/3$.

Функция трех переменных $u = f(x, y, z)$ сопоставляет каждой точке $P(x, y, z)$ из некоторого тела V число. Например, 1) $T = f(x, y, z)$ – температура тела в точке $P(x, y, z)$, 2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние до начала координат, 3) $\theta(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $(z > 0)$ – угол между вектором $\overrightarrow{OP}$ и осью Oz.

Поверхность уровня функции $u = f(x, y, z)$ задается уравнением $C = f(x, y, z)$

1.2 Предел и непрерывность функции двух переменных

Пусть точка (a, b) является предельной для ОДЗ функции $f(x, y)$ (обозначим его D), т.е. в любом круге центром в точке $(a; b)$ содержатся точки из D.

Определение 1.2.1. Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ при $x \to a, y \to b$ (записываем как $A = lim_{x \to a, y \to b} f(x, y)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что как только

$$\begin{cases} |x - a| < \delta, \ |y - b| < \delta, \\ (x, y) \in D, \\ (x, y) \neq (a, b) \end{cases},$$

то $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Функция $f(x, y)$ *непрерывна в точке* (a, b), если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b)$. По-другому, функция непрерывна в точке $(a; b)$ если полное приращение функции $\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ стремиться к нулю, коль скоро $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Свойства пределов и свойства непрерывных функций те же самые, что и для функции одной переменной. Алгебраические операции, а также подстановка функции в функцию не выводят за класс непрерывных функций.

Пусть D область на плоскости. Точку назовем *внутренней точкой* области D, если найдется кружок достаточно малого радиуса с центром в точке , целиком лежащий в D. Точку Q назовем *внешней точкой* области D, если найдется кружок достаточно малого радиуса с центром в точке Q, не пересекающийся с D. Точку R назовем *граничной* для области D, если каждый кружок с центром в точке R пересекается как с D так и с дополнением D. Совокупность всех граничных точек называется границей области D и обозначается ∂D. Если $\partial D \subseteq D$, то область называют *замкнутой*, а если ни одна точка из границы не входит в D, то D называют *открытой*. Область может быть не замкнутой и не открытой, например внутренность квадрата, к торому подсоединены только две стороны. Аналогичные определения внутренних внешних, граничных точек; замкнутости и открытости можно сформулировать для трехмерного пространства, только вместо кружка центром в точке P нужно рассматривать шар с центром в точке P.

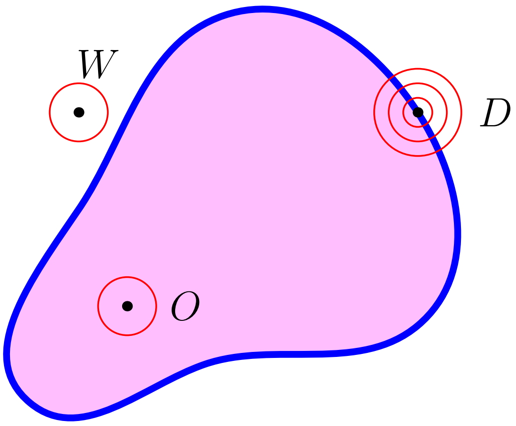


Рис. 1.2: O – внутренняя, W – внешняя, D – граничная точки

Область (тело) называют *ограниченной*, если ограничены сверху расстояния точек этой области (тела) до начала координат. Иными словами: плоская область ограничена, если ее можно вместить в круг достаточно большого радиуса.

Теорема Вейерштрасса. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной и замкнутой области D. Тогда функция f ограничена и более того, достигает своего наибольшего и наименьшего значений:*

$$\exists x_{min}, x_{max} \in D : \forall x \in D \Rightarrow f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max}).$$

Как найти наибольшее и наименьшее значение функции в заданной ограниченной и замкнутой области? Методом линий уровня найдем такие значения функции $z = x + y$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$ (Ответ: $z_{max} = 2\sqrt{2}$, $z_{min} = -2\sqrt{2}$.) Далее будет указан метод вычисления наибольших и наименьших значений средствами дифференциального исчисления.

Область D называется *связной*, если любые две точки области можно соединить непрерывной кривой, лежащей целиком в области D.

Теорема Больцано-Коши. *Пусть $z = f(x, y)$ – непрерывная функция на связной области D, и $C_1 = f(x_1, y_1); C_2 = f(x_2, y_2)$ – два каких-либо значения этой функции. Тогда для любого $C \in [C_1, C_2]$ найдется точка $(x_c, y_c) \in D$ значение в которой равно C.*

Следствием этой теоремы является метод прорисовки областей, заданных неравенством $F(x, y) \ge 0$ или системой таких неравенств. Метод заключается в следующем. а)

Заменяем неравенство на равенство $F(x, y) = 0$ и рисуем на плоскости Oxy линию γ, заданную этим уравнением. В результате плоскость Oxy распадется на множество областей $U, V, \ldots$. б) Каждую из этих областей испытываем, поставляя пробную (наиболее удобную с т.з. вычислений) внутреннюю точку в неравенство $F(x, y) > 0$. Если получаем верное числовое неравенство, то соответствующую область заштриховываем, в противном случае переходим к другой области. Объединение заштрихованных областей вместе с линией γ (которая будет служить границей) и будет искомой областью D.

Пример. Нарисовать область на плоскости, заданную неравенством $(x+y)/(x-y) \geq 0$.

1.3 Частные производные

Частные приращения по x и по y функции $f(x, y)$ в точке (x, y) определяются так:

$$\Delta_x f = f(x + \Delta x, y) - f(x, y); \quad \Delta_y f = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Сумма частных приращений, вообще говоря, не равна *полному приращению*, по определению равному $\Delta f := f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Частной производной по x называется предел отношения частного приращения по x к приращению переменной x, если это приращение стремиться к нулю:

$$f'_x(a, b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}; \quad f'_y(a, b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

По другому, частная производная по x обозначается как $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$. Техника вычисления частных производных такая же, как и производных функции одной переменной, с учетом того, что все остальные переменные, кроме той, по которой вычисляется частная производная, считаются константами. Найдем частные производные функции $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}; \ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}.$$

Частная производная n-го порядка есть по определению частная производная от частной производной (n-1)-го порядка. Таким образом, получаем четыре частных производных второго порядка от функции $z = f(x, y)$: $f''_{xx}; f''_{xy}; f''_{xy}; f''_{yy}$

Производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$ называются *смешанными*.

Продолжим вычисление частных производных функции $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r''_{xx} = (x/r)'_x = \frac{x'r - r'_x x}{r^2} = \frac{r - x^2/r}{r^2} = \frac{y^2}{r^2}; r''_{yy} = \frac{x^2}{r^2}; r''_{xy} = (x/r)'_y = \frac{0 \cdot r - y/r \cdot x}{r^2} = -\frac{yx}{r^3} = r''_{yx}$$

Теорема о равенстве смешанных производных. *Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в открытой области. Тогда в этой области смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} совпадают.*

Как следствие, получаем: *если смешанные производные одного порядка k и отличающиеся друг от друга лишь порядком дифференцирования равны при условии существования и непрерывности всех частных производных k-го порядка.*

Например,

$$\frac{\partial^5 z}{\partial x \partial y \partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2}.$$

1.4 Дифференциал

Принцип построения дифференциала функции $z = f(P)$ не зависит от того, сколько координат нужно для задания точки P. Фиксируем току P_0 и предположим, то функция f определена в какой-либо окрестности этой точки. Изучая поведение функции f локально, а именно, около точки P_0, мы хотим приблизить приращение $\Delta f = f(P) - f(P_0)$ самой простой функцией – линейной $L(\overrightarrow{P_0P})$, т.е. такой, которая является линейной комбинацией координат $\Delta x, \Delta y, \ldots$ вектора $\overrightarrow{P_0P}$. Общий вид линейных функций одной, двух и трех переменных таков:

$$A\Delta x; \quad A\Delta x + B\Delta y; \quad A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z. \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

Далее следует уточнить, что значит "приблизить приращение другой функцией L"? Это по определению значит, что разность между приращением $\Delta f(\overrightarrow{P_0P})$ и значением $L(\overrightarrow{P_0P})$ должна быть величиной б.м. более высокого порядка по сравнению с длиной вектора $\overrightarrow{P_0P}$, т.е. с величиной $\Delta r := \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \cdots}$:

$$\Delta f = L(\overrightarrow{P_0P}) + \alpha \cdot \left|\overrightarrow{P_0P}\right| \qquad (\alpha\text{– б.м. относительно } P \to P_0) \tag{1.1}$$

Решим эту задачу для площади прямоугольника $S = xy$ с размерами 2×3. В этом конкретном случае $P_0(2; 3)$, $P(x, y)$, $S(P_0) = 6$, $\Delta x = x - 2$, $\Delta y = y - 3$ и

$$\Delta S = (2 + \Delta x)(3 + \Delta y) - 6 = 3\Delta x + 2\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Мы видим, что приращение ΔS действительно раскладывается в сумму двух принципиально разных слагаемых: $L(\Delta x, \Delta y) = 3\Delta x + 2\Delta y$ – линейная часть приращения, а $\Delta x \Delta y = \gamma \Delta r$, где $\gamma = \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta r} = \frac{\Delta x}{\Delta r} \cdot \Delta y$ будем б.м. величиной, ибо $|\Delta x / \Delta r| \leq 1$.

Определение 1.4.1. Функция $f(x, y)$ называется *дифференцируемой в точке* (a, b), если ее полное приращение можно представить в виде суммы линейной функции от Δx и Δy и величины бесконечно малой высшего порядка относительно $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \gamma \dot{\Delta} r \qquad (\lim_{\Delta r \to 0} \gamma = 0) \tag{1.2}$$

Тогда эта линейная часть $A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ называется *дифференциалом функции f в точке* $(a;b)$ и обозначается $df(a;b)$.

Замечание 1.4.2. Если α и β бесконечно малые величины относительно базы $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то величина $\alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δr. Верно и обратное утверждение – любая бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δr представима в виде $\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$, где α и β – бесконечно малые величины; а именно $\gamma\Delta r = \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, если положить $\alpha := \gamma\frac{\Delta x}{\Delta r}$, $\beta = \gamma\frac{\Delta y}{\Delta r}$.

Коэффициенты A и B однозначно находятся из разложения (1.2).

Теорема 1.4.3. *Если функция дифференцируема в точке (a,b), то существуют частные производные в этой точке, и $df = f'_x(a,b)\Delta x + f'_y(a,b)\Delta y$*

Доказательство. Полагаем в (1.2)$\Delta y = 0$. Получаем $\Delta_x f = A\Delta x + o(\Delta x)$. Делим получившееся соотношение на Δx и затем устремляем Δx к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A + \frac{\gamma\Delta x)}{\Delta x}) = A + 0 = A.$$

Аналогично доказывается, что $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. □

Замечание 1.4.4. Взяв $f(x,y) = x$, находим $dx = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y = \Delta x$. Аналогично, $dy = \Delta y$. Итак, приращение и дифференциал независимой переменной суть одно и то же. Более общо: любая линейная функция $Ax + By$ дифференцируема и её дифференциал (в произвольной точке) совпадает с самой функцией, а именно равен $A\Delta x + B\Delta y$.

В связи с этим замечанием и теоремой 1 дифференциал приобретает окончательный вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy. \tag{1.3}$$

В операторном виде это правило вычисления дифференциала, точнее оператор дифференциала, можно записать следующим образом:

$$d.. = \frac{\partial ..}{\partial x}dx + \frac{\partial ..}{\partial y}dy, \tag{1.4}$$

где точки (не обязательные) означают место для функции двух переменных, которую жаждет продифференцировать оператор d.

Замечание 1.4.5. Для функции n переменных $z = f(x_1,\ldots,x_n)$ вид дифференциала следующий:

$$df = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot dx_i.$$

Пример 1.4.6. Пусть $z = 2x^2 - y^2 + 3xy$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 3x$ и

$$dz = (4x + 3y)dx + (3x - 2y)dy.$$

Это функция четырех переменных. Фиксируем точку $P(1, 2)$. Значение функции z в ней равно $z(1; 2) = 2 - 4 + 6 = 4$, а дифференциал равен $dz(1; 2) = 10dx - dy$. Пользуясь этим, найдем приближенно значение $z(0.9; 2.05)$. Имеем:

$$z(0.9; 2.05) = z(1; 2)+[z(0.9; 2.05)-z(1; 2)] \approx 4+dz_{(1;2)}(-0.1; 0.05) = 4+10\cdot(-0.1)-0.05 = 2.95$$

(Точное значение равно $2 \cdot (0.9)^2 - (2.05)^2 + 3 \cdot 0.9 \cdot 2.05 = 2,9525$)

Приближенные вычисления, основанные на понятии дифференциала, используют приближенное равенство $\Delta f \approx df$ или, более развернуто,

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) \approx f(a, b) + f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y.$$

Предложение 1.4.7. *Дифференцируемость функции влечет её непрерывность.*

Доказательство. В самом деле, если в (1.1) устремить Δx и Δy к нулю, то получим $\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f = 0$, ибо каждое слагаемое в правой части (1.1) имеет пределом 0. Следовательно, $\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = f(a, b)$. □

Дифференциалом k-го порядка называется дифференциал от дифференциала (k-1)-го порядка; при этом с переменными $\Delta x, \Delta y, \ldots$ поступают как с константами. Обозначение: $d^k f$ или $d^k z$. Дифференциал 2-го порядка функции 2-х переменных выглядит так:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Более общо: дифференциал 2-го порядка от функции n переменных – квадратичная форма относительно переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$:

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

1.4.1 Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 1.4.8. *Если частные производные f'_x, f'_y существуют и непрерывны в окрестности точки (a, b), то функция $f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. Выберем окрестность точки (a, b) в форме прямоугольника, со сторонами параллельными координатным осям и такую малую, что бы в ней существовали и были непрерывны частные производные f'_x и f'_y. Применим теорему Лагранжа: для пары (x, y) из выбранной окрестности найдутся числа $\xi_x \in (x, a)$; $\nu_y \in (y, b)$ такие, что

$$\Delta f = f(x, y) - f(a, b) = f(x, y) - f(a, y) + f(a, y) - f(a, b) = f'_x(\xi_x, y)\Delta x + f'_y(a, \nu_y)\Delta y$$

Здесь $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$. Так как функции $\alpha := f'_x(\xi_x, y) - f'_x(a, b)$ и $\beta := f'_y(a, \nu_y) - f'_y(a, b)$ бесконечно малы при $\Delta x \to 0$,$\Delta y \to 0$ в силу непрерывности частных производных и предельных соотношений $\lim_{\Delta x \to 0} \xi_x = a$, $\lim_{\Delta y \to 0} \nu_y = b$, то

$$\Delta f = (f'_x(a, b) + \alpha)\Delta x + (f'_y(a, b) + \beta)\Delta y = f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

будет искомым разложением вида (1.2). □

1.5 Производная сложной функции

Теорема 1.5.1. *Пусть $x(t), y(t)$ –дифференцируемые функции, а $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в области D. Тогда имеет место формула*

$$\frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{1.5}$$

Доказательство. Придадим приращение Δt переменной t. Тогда x и y получат свое приращение $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ и $\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$, а значит, получит приращение и функция f. Согласно теореме 2 функция f дифференцируема, и $\Delta f = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ для некоторых б.м. α и β . Поделим последнее соотношение на Δt, а затем перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = f'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Так как $\lim_{\Delta t \to 0} f'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'_x \cdot x'(t)$, $\lim_{\Delta t \to 0} f'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'_y \cdot y'(t)$, $\lim_{\Delta t \to 0} \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0 \cdot x'(t) = 0$ и $\lim_{\Delta \to 0} \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} = 0 \cdot y'(t) = 0$, то формула (1.5) следует. □

Следствие 1.5.2. *Если $y = y(x)$ и $z = f(x, y)$, то*

$$\frac{dz}{dx} := f(x, y(x))'_x = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y'_x \tag{1.6}$$

Левая часть $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной по x, в отличии от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Пример 1.5.3. Пусть $z = x \operatorname{arctg} y$, а $y = x^2$. Заметим, что $z(x) = x \operatorname{arctg} x^2$, и можно вычислить полную производную dz/dx непосредственно. Однако воспользуемся формулой (1.6). Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{arctg} y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1 + y^2}$$

Тогда
$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{arctg} y + \frac{x}{1+y^2} \cdot (x^2)' = \operatorname{arctg} y + \frac{2x^2}{1+y^2}.$$
Следствие 1.5.4. *Пусть функции $x(u,v), y(u,v), f(x,y)$ имеют непрерывные частные производные. Тогда*
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'_u + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'_u; \\ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'_v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'_v \end{cases} \tag{1.7}$$
или, в матричном виде
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Рассмотрим частный важный случай – переход от декартовых координат (x,y) к полярным координатам (r,φ). Здесь
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} ; \quad \begin{pmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$
Пример 1.5.5. Пусть $f(x,y) = 3x + 7y$. Тогда в полярных координатах эта функция выражается так: $f = r(3\cos\varphi + 7\sin\varphi)$, и (1.8) превращается в
$$\begin{pmatrix} 3\cos\varphi + 7\sin\varphi \\ r(-3\sin\varphi + 7\cos\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$
что верно.

1.6 Неявные функции

Рассмотрим уравнение
$$F(x,y) = 0, \tag{1.9}$$
задающее на плоскости Oxy некоторую кривую γ. Предположим, что для любого $x \in [a;b]$ существует единственное значение $y_x \in [c;d]$ такое, что $F(x,y_x) = 0$. Тогда соответствие $x \to y_x$ задает функцию с областью определения $[a;b]$ и областью значений $\subseteq [c;d]$. Эта функция называется неявно заданной соотношением (1.9). Геометрически это значит, что любая вертикальная прямая $y = \tau$, $\tau \in [a,b]$ пересекает кривую γ в заданном прямоугольнике ровно в одной точке.

Теорема о неявной функции. *Пусть функции F, F'_x, F'_y определены и непрерывны в окрестности точки (x_0,y_0), причем $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Тогда найдется прямоугольник $[a,b] \times [c,d]$ содержащий $(x_0;y_0)$ как внутреннюю точку и такой, что уравнение (1.9) определяет (неявную) функцию $y = f(x)$ с ОДЗ равном $[a,b]$ и областью значений, лежащую в отрезке $[c,d]$. (В частности $F(x,f(x)) \equiv 0$ по x). При этом функция $y = f(x)$ дифференцируема и*
$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Пример 1.6.1. А. Соотношение $x^2 + y^2 = 1$ в окрестности точки $(0,1)$ задает функцию $y = \sqrt{1-x^2}$ а в окрестности точки $(0,-1)$ задает функцию $y = -\sqrt{1-x^2}$. В окрестности точки $(1,0)$ это соотношение не задает никакой функции $y = f(x)$, но задает функцию $x = \sqrt{1-y^2}$. Имеем,

$$y'_x = -\frac{(x^2+y^2-1)'_x}{(x^2+y^2-1)'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y},$$

что согласуется с производной явной функции $y = \sqrt{1-x^2}$.

Б. Однако явную функцию найти (точнее: выразить в виде аналитической записи) не всегда возможно. Например, рассмотрим уравнение $ye^y = x$. Это уравнение не решается в элементарных функциях относительно y. Тем не менее, $(ye^y - x)'_y = e^y + ye^y > 0$ для $y > -1$ и в области $(-1/e; +\infty) \times (-1; +\infty)$ получаем неявную функцию, обозначим ее $Er(x)$, такую, что $Er(x) \cdot \exp Er(x) \equiv x$. При этом

$$\frac{dEr(x)}{dx} = -\frac{-1}{e^y + ye^y} = \frac{e^{-y}}{1+y}.$$

Например, в точке $x = e; y = 1$ получаем $Er'(e) = 1/2e$ и касательная к графику функции $y = Er(x)$ в точке $x = e$ будет такова: $y = 1 + \frac{1}{2e}(x - e) = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$.

1.7 Градиент. Производная по направлению

Пусть $u = f(x,y,z)$ – функция (=скалярное поле), определенная в окрестности точки $P(a,b,c)$, и $\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$ – направление в этой точке, т.е. вектор единичной длины с направляющими косинусами α, β, γ . *Производной по направлению* $\mathbf{n}$ *скалярного поля* f *в точке* P называется число

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+\cos\alpha\cdot h, b+\cos\beta\cdot h, c+\cos\gamma\cdot h)}{h} \tag{1.10}$$

Заметим, что h здесь есть не что иное как расстояние от точки с координатами $(a+\cos\alpha\cdot h, b+\cos\beta\cdot h, c+\cos\gamma\cdot h)$, до точки $P(a,b,c)$.

Производную по направлению можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma \tag{1.11}$$

Эта формула вытекает из правила дифференцирования сложной функции. Правая часть ее есть скалярное произведение вектора $\mathbf{n}$ на вектор

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\cdot\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\cdot\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(P)\cdot\mathbf{k} \tag{1.12}$$

который называется *градиентом скалярного поля* f *в точке* P. Точнее правая часть в (1.11) есть проекция градиента на направление $\mathbf{n}$.

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(P) \cdot \mathbf{n} \tag{1.13}$$

Предложение 1.7.1. *Производная по направлению в точке* P *меняется в зависимости от направления от величины* $-\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(P)\right|$ *до* $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(P)\right|$. *При этом наибольшего значения она достигает в направлении градиента, а наименьшего – в противоположном направлении.*

Пример 1.7.2. Пусть $z = x/y$. Тогда $z'_x = 1/y$, $z'_y = -x/y^2$. Фиксируем точку $(4, 2)$. Тогда $z'_x(P) = 1/2$, $z'_y(P) = -1$. Следовательно, $\overrightarrow{grad} z(P) = 1/2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Пусть задано направление вектором $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Перейдем к орту этого вектора – $\mathbf{n} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}| = 3/5\mathbf{i} - 4/5\mathbf{j}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial n} = (1/2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (3/5\mathbf{i} - 4/5\mathbf{j}) = 3/10 + 4/5 = 1.1$$

В частном случае $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ производная по направлению $\mathbf{n}$ дает частную производную по x. Аналогично для $\mathbf{n} = \mathbf{j}$.

Уравнение $f(x, y, z) = C$ задает поверхность уровня C. Пусть $C = f(a, b, c)$, т.е. рассмотрим поверхность уровня, проходящую через точку $P(a, b, c)$. Обозначим эту поверхность уровня τ.

Определение 1.7.3. Пусть точка P фиксирована, а $R, S \in \tau$ причем точки P, R, S не лежат на одной прямой и тем самым определяют плоскость $\pi(P, R, S)$, называемую *секущей*. Предел секущих плоскостей при условии $R, S \to P$; $R, S \in \tau$ называется касательной плоскостью поверхности τ.

Предложение 1.7.4. *Градиент перпендикулярен поверхности уровня.*

Доказательство. Пусть $(x(t), y(t), z(t))$ – какая-либо кривая, лежащая на поверхности уровня $f(x, y, z) = C$, и проходящая через току P т.е. выполняется тождественно по t равенство $f(x(t), y(t), z(t)) = C$. Дифференцируя его по t, находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot z' = 0$$

Отсюда следует, что градиент $\overrightarrow{grad} f(P)$ перпендикулярен касательной к кривой $(x(t), y(t), z(t))$ в точке P и тем самым перпендикулярен к касательной плоскости к поверхности уровня в виду произвольности этой кривой. □

Следствие 1.7.5. *Уравнение касательной плоскости к поверхности уровня, проходящей через точку* P, *имеет вид :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \cdot (y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \cdot (z - c) = 0 \tag{1.14}$$

В частности, уравнение касательной плоскости к графику функции $z = f(x,y)$ в точке $P(a,b,c)$, где $c = f(a,b)$ имеет вид

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\cdot(y-b) \tag{1.15}$$

Пример 1.7.6. А. Найдем уравнение касательной плоскости к графику функции $z = e^x\cos y$ в точке $P(0;\pi;-1)$. Имеем:

$$z'_x(0;\pi) = e^x\cos y|_{(0;\pi)} = -1; \quad z'_y(0;\pi) = -e^x\sin y|_{(0;\pi)} = 0; \quad z(0;\pi) = -1$$

откуда по формуле (1.15) получаем: $z-(-1) = (-1)(x-0) + 0\cdot(y-\pi)$ или $x+z+1 = 0$.

Б. Найдем уравнение касательной плоскости и нормальный вектор к поверхности τ, заданной уравнением $xy - z^2 = 1$ в точке $P(1;2;1)$. Имеем:

$$(xy-z^2-1)'_x = y|_{(1;2;1)} = 2; \quad (xy-z^2-1)'_y = x|_{(1;2;1)} = 1; \quad (xy-z^2-1)'_z = -2z|_{(1;2;1)} = -2.$$

Отсюда получаем вектор нормали $\mathbf{n} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ и уравнение касательной плоскости (см. (1.15) имеет вид $2(x-1)+(y-2)-2(z-1) = 0$ или $2x+y-2z = 2$.

1.8 Формула Тейлора

Выведем формулу Тейлора функции $z = f(x,y)$ в точке $P(a,b)$ исходя из формулы Тейлора функции одной переменной. Сначала фиксируем вторую переменную, а затем каждую из функций $f(a,b+\Delta y)$, $f'_x(a,b+\Delta y)$, $f''_{xx}(a,b+\Delta y)$ раскладываем по второй переменной. При этом $f(a,b+\Delta y)$ раскладываем до членов второго порядка включительно, $f'_x(a,b+\Delta y)$ – до членов первого порядка, а $f''_{xx}(a,b+\Delta y) = f''_{xx}(a,b)+\rho$ где ρ – б.м.:

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a,b+\Delta y) + f'_x(a,b+\Delta y)\Delta x + \frac{1}{2}f''_{xx}(a,b+\Delta y)\Delta x^2 + \alpha\cdot\Delta x^2 =$$

$$= f(a,b) + f'_y(a,b)\Delta y + \frac{1}{2}f''_{yy}(a,b)\Delta y^2 + \beta\cdot\Delta y^2 +$$

$$+ f'_x(a,b)\Delta x + f''_{xy}(a,b)\Delta x\Delta y + \gamma\Delta y\Delta x + \frac{1}{2}f''_{xx}(a,b)\Delta x^2 + \rho\Delta x^2$$

Здесь α,β,γ,ρ – бесконечно малые величины. Переставляя слагаемые и учитывая, что $\alpha\Delta x^2 + \beta\Delta y^2 + \gamma\Delta y\Delta x + \rho\Delta x^2$ есть бесконечно малая высшего порядка малости по сравнению с Δr^2 получаем формулу Тейлора функции двух переменных до членов второго порядка включительно:

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(P)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(P)\cdot\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)\cdot\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P)\cdot\Delta x\cdot\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P)\cdot\Delta y^2) + o(\Delta r^2)$$

Определение 1.8.1. Выражение $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P)\cdot\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P)\cdot\Delta x\cdot\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P)\Delta y^2$ называется вторым дифференциалом функции f в точке P.

Второй дифференциал есть квадратичная форма двух переменных, т.е. функция вида $A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$, где входят все возможные произведения $\Delta x, \Delta y$ второй степени и только они.

Пример 1.8.2. Разложим по формуле Тейлора функцию $z=5x^2y+y^4+xy+3$ в окрестности точки $(1,1)$. Считаем:

$$z'_x(P)=10xy+y|_P=11;\quad z'_y(P)=5x^2+4y^3+x|_P=10;$$

$$z''_{xx}(P)=10y|_P=10;\quad z''_{xy}(P)=10x+1|_P=11;\quad z''_{yy}(P)=12y^2|_P=12$$

Тогда

$$5x^2y+y^4+xy+3=$$

$$=10+11(x-1)+10(y-1)+1/2(10(x-1)^2+22(x-1)(y-1)+12(y-1)^2)+o((x-1)^2+(y-1)^2)$$

Пользуясь этим разложением, вычислим приближенно $z(1,1;0,9)$ –

$$z(1,1;0,9)\approx 10+11\cdot 0.1+10\cdot(-0.1)+\frac{1}{2}(10\cdot 0.01-22\cdot 0.01+12\cdot 0.01)=10.1+1/2\cdot 0=10.1$$

Точное значение функции z в точке $(1.1;0.9)$ равно 10.0911

1.9 Экстремумы

В следующем определении подразумевается функция либо одной переменной, либо двух переменных, либо трех переменных. При этом окрестностью точки в случае одной переменной подразумевается интервал, двух переменных – круг, трех переменных – шар.

Определение 1.9.1. Точка P называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $f(R)$, если найдется окрестность U этой точки такая, что $f(R)\le f(P)$ ($f(R)\ge f(P)$) для любой точки $R\in U$. Локальный экстремум – это либо локальный максимум, либо локальный минимум.

Теорема 1.9.2 (необходимое условие экстремума)**.** *В точке экстремума все частные производные равны нулю (если они существуют).*

Действительно, если точка $P(a,b)$ является для функции $f(x,y)$ локальным максимумом, то a есть локальный максимум функции одной переменной $g(x):=f(x,b)$. Применим необходимое условие экстремума функции одной переменной и получим $g'(a)=0$. Это равносильно равенству $\frac{\partial f}{\partial x}(P)=0$. Аналогично доказывается равенство $\frac{\partial f}{\partial y}(P)=0$. □

Следствие 1.9.3. *В точке экстремума градиент равен нулю (нулевой вектор), а также производная по любому направлению равна 0.*

Пусть P – точка экстремума функции двух переменных $z = f(x, y)$. Так как $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$ согласно необходимому условию экстремума, то $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(P) = 0$. Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(P) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(P) \cdot \mathbf{n} = 0$. □

Точка P, в которой все частные производные, а значит и производная по любому направлению равны нулю, называется *критической* или *стационарной*. Точка $O(0, 0)$ для функции $z = x^2 + y^2$ является локальным и даже глобальным минимумом. Точка O для функции $z = -x^2 - y^2$ является локальным и даже глобальным максимумом. Точка O для функции $z = x^2 - y^2$ является стационарной, но не экстремальной. Такого рода стационарную точку будем называть седловой, так как по одному направлению, а именно по направлению оси Ox эта точка для функции $z = x^2 - y^2$ будет точкой локального минимума, а по другому направлению – по оси Oy, эта же точка будет локальным максимумом.

Пример 1.9.4. Найдем все стационарные точки функции $z = xy + 50/x + 20/y$. Имеем: $z'_x = y - 50/x^2$ и $z'_y = x - 20/y^2$. Приравнивая частные производные к нулю, и исключая y из системы, получим $x - (20x^4)/50^2 = 0$. Отсюда, учитывая, что $x \neq 0$ в силу ОДЗ, находим $x^3 = 50^2/20 = 5 \cdot 25$ и $x = 5$, $y = 50/5^2 = 2$. Итак, получили единственную стационарную точку $P(5, 2)$. Заметим, что на границе области $D : x > 0, y > 0$ функция z обращается в бесконечность. То же самое верно и при $x \to +\infty$, а также при $y \to +\infty$. Следовательно, минимум достигается в какой-то внутренней точке области D.

/*/ Более строго, следует рассмотреть область $D_\varepsilon : \varepsilon \leq x \leq 1/\varepsilon; \varepsilon \leq y \leq 1/\varepsilon$ (квадрат) для достаточно малого положительного ε (например, $\varepsilon = 0.1$) и подсчитать значения функции на границе этого квадрата; оно $\geq 20/\varepsilon$. Значение во внутреннней точке P этого квадрата равно $z(5, 2) = 10 + 50/5 + 20/2 = 30 < 20/\varepsilon$. Функция z непрерывна на квадрате D_ε и по теореме Вейерштрасса достигает своего наименьшего значения. Выше доказано, что это наименьшее значение достигается во внутренней точке квадрата. Согласно теореме 1, в ней частные производные равны 0. Но такая точка одна, и она нам известна – это точка $P(5, 2)$. Итак, доказано, что $P(5, 2)$ есть точка глобального минимума функции z в области D. При этом мы учитываем, что ограниченные замкнутые области D_ε при $\varepsilon \to 0$ исчерпывают открытую область D, т.е. $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{1/n}$.

Перейдем к выводу достаточных условий экстремума функций многих переменных.

Лемма 1.9.5. *Квадратичная форма $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2$ положительно определена, т.е. принимает только положительные значения для всех $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$, если и только если выполнены условия.*

$$A > 0 \text{ и } AC - B^2 > 0. \tag{1.16}$$

В случае

$$A < 0 \text{ и } AC - B^2 > 0. \tag{1.17}$$

эта квадратичная форма отрицательно определена, т.е. принимает только отрицательные значения при всех $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$.

Доказательство. Квадратичная форма $\Phi(\Delta x, \Delta y)$ положительно определена, если и только если противоположная форма $-\Phi(\Delta x, \Delta y)$ отрицательно определена. Кроме того, матрица $M := \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B & C \end{smallmatrix}\right)$ удовлетворяет условиям (1.16) тогда и только тогда, когда матрица $-M$ удовлетворяет условиям (1.17). Отсюда вытекает, что достаточно рассмотреть случай положительно определенной квадратичной формы.

Предположим, что неравенства (1.16) выполнены. Тогда соотношение

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = A(\Delta x + B/2A\Delta y)^2 + \frac{AC - B^2}{4A}\Delta y^2, \tag{1.18}$$

полученное путем выделения полного квадрата показывает, что форма положительно определена, ибо $A > 0$ и $(AC - B^2)/4A > 0$ и при этом $\Delta x + B/2A\Delta y = 0 = \Delta y$ лишь в том случае, когда $\Delta x = 0 = \Delta y$.

Наоборот, пусть форма $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2$ положительно определена. Подставляя в нее $\Delta x = 1, \Delta y = 0$ получаем, что $A > 0$. Тогда соотношение (1.18) имеет место и при $\Delta y = 2\sqrt{A}$, $\Delta x = -B/\sqrt{A}$ при котором получаем значение формы равное $AC - B^2$, и это значение также должно быть положительным. □

Теорема 1.9.6 (достаточное условие экстремума)**.** *Пусть – стационарная точка функции $f(x, y)$. Предполагаем, что функция f имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки P. Обозначим*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P); \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P); \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P).$$

*Если выполнено условие (1.16), то P – точка локального минимума. Если же выполнено условие (**??**), то P – точка локального максимума. Если же $AC - B^2 < 0$, то не будет экстремумом (седловая точка).*

Доказательство. Применим формулу Тейлора и разложим функцию f в окрестности точки P:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + o(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

Допустим, что выполнено условие (1.16). Величина $o(\Delta x^2 + \Delta y^2)$ не может изменить знака квадратичной формы $1/2(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2)$ при достаточно малых $\Delta x, \Delta y$. Отсюда следует, что $f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \geq 0$ при таких же достаточно малых $\Delta x, \Delta y$. Это и означает, что $P(a, b)$ есть локальный минимум. Аналогично разбирается случай, когда выполняется условие (1.17). Если же $AC - B^2 < 0$, то из соотношения (1.18) видно, что квадратичная форма $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2$ принимает значения разных знаков. Более точно, при $\Delta y = 0, \Delta x \neq 0$ ее знак совпадет со знаком A, а при $\Delta x = -B/2A\Delta y \neq 0$ ее знак совпадает со знаком $(AC - B^2)/4A$, который противоположен знаку A. То же самое будет происходить и с приращением $f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ при достаточно малых $\Delta x, \Delta y$. □

Продолжение примера 1.9.4. Вернемся к функции $z = xy + 50/x + 20/y$. Мы нашли стационарную точку $P(5, 2)$. Вычислим второй дифференциал в этой точке:

$$z''_{xx} = (y - 50/x^2)'_x = 100/x^3; \quad z''_{xx}(P) = 100/5^3 = 4/5; \quad z''_{xy} = 1; \quad z''_{yy} = (x - 20/y^2)'_y = 40/y^3; \quad z''_{yy}($$

и $d^2z(P) = 0.8dx^2 + 2dxdy + 5dy^2$. Это положительно определенная форма, ибо $0.8 > 0$ и $0.8 \cdot 5 - 1^2 = 3 > 0$. Следовательно, P – локальный минимум. Мы знаем большее: P – глобальный минимум в области $D : x > 0, y > 0$. Без исследования функции z на границе области D, нельзя получить этот факт.

Пример 1.9.7. Найти экстремумы функции трех переменных $u = x^3 + y^3 + z^3 - 24x - 3y - 81z + 1$. Частные производные $u'_x = 3x^2 - 24$, $u'_y = 3y^2 - 3$, $u'_z = 3z^2 - 81$ приравниваем к нулю и находим восемь стационарных точек $(\pm 2; \pm 1; \pm 3)$. Так как второй дифференциал $d^2u = 6xdx^2 + 6ydy^2 + 6zdz^2$ имеет диагональный вид, то он будет положительно определен если, $x > 0, y > 0, z > 0$ и отрицательно определен, если $x < 0, y < 0, z < 0$. Следовательно, $(2, 1, 3)$ – локальный минимум, а $(-2, -1, -3)$ – локальный максимум. В остальных стационарных точках экстремума нет.

Глава 2

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Задача интегрирования обратна к задаче дифференцирования: по заданной функции $f(x)$ требуется найти функцию $F(x)$, называемую первообразной такую, что $F'(x) = f(x)$. Иными словами, мы фактически решаем дифференциальное уравнение

$$y' = f(x). \tag{2.1}$$

Так как $y' = dy/dx$, то уравнение (2.1) можно переписать в дифференциалах следующим образом:

$$dy = f(x)dx. \tag{2.2}$$

Решать уравнение (2.1) или эквивалентное ему уравнение (2.2) мы будем на интервале $(a; b)$, при этом случаи $a = -\infty$ и/или $b = +\infty$ не исключаются. Итак, любое частное решение такого уравнения есть первообразной функции $f(x)$. Если прочитать таблицу производных в обратном порядке – справа на лево, то получим частичное решение этой задачи: $x^2/2$ – первообразная для x, а e^x – первообразная для самой себя на всей числовой оси, $\ln x$ – первообразная для $1/x$ на интервале $(0; +\infty)$, а $\ln(-x)$ – первообразная для той же функции $1/x$, но уже на интервале $(-\infty; 0)$ и т.д. Так как производная константы равна 0, то из наличия первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ вытекает, что и любая функция вида $F(x) + C$ будет первообразной той же самой функции $f(x)$. Оказывается других первообразных нет (см. теорему 2.1.2 далее).

Функция двух переменных $F(x, C)$ называется общим решением уравнения (2.1) или, по-другому, *неопределенным интегралом* функции $f(x)$, если при подстановке вместо C любого числа получаем частное решение уравнения (2.1) и любое частное решение уравнения (2.1) получается таким образом.

Неопределённый интеграл обозначается $\int f(x)\,dx$. Функция $f(x)$ называется подынтегральной, дифференциал $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, а $\int$ – знак интеграла (растянутая латинская буква S, первая буква слова Sum – сумма). Возникает вопрос о существовании первообразной и неопределенного интеграла. В теореме 3.2.1, §3.2 будет доказано, что первообразная непрерывной функции всегда существует.

Лемма 2.1.1. *Пусть $H'(x) = 0$ тождественно для $x \in (a, b)$. Тогда $H(x) = C$ - константа на этом интервале.*

Доказательство. Обозначим $C = H(x_0)$ для какой-либо точки $x_0 \in (a, b)$. Возьмём произвольную точку $x \in (a, b)$ и к разности $H(x) - H(x_0)$ применим теорему Лагранжа: $H(x) - H(x_0) = H'(c)(x - x_0) = 0$ для некоторой точки $c \in (x, x_0) \subseteq (a, b)$. Отсюда $H(x) = C$ и лемма доказана. □

Теорема 2.1.2 (о первообразных)**.** *Две первообразных одной и той же функции, определенной на интервале, отличаются на константу.*

Доказательство. Пусть $F(x)$ и$G(x)$ – первообразные функции $f(x)$. Тогда

$$(Fx) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

откуда, по лемме 2.1.1, $F(x) - G(x) = C$ – константа. □

Следствие 2.1.3. *Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)\, dx = F(x) + C$.*

Заметим, что если в качестве ОДЗ функции взять не интервал, а, например, такое несвязное множество как объединение двух интервалов $(-1; 0) \cup (0; 1)$, то любая функция вида

$$F(x) = \begin{cases} C_1, & \text{если } x \in (-1; 0) \\ C_2, & \text{если } x \in (0; 1) \end{cases}$$

имеет нулевую производную, и тем самым лемма и теорема о первообразных перестают быть верными в этом случае.

Из определения первообразной и неопределенного интеграла сразу следует, что производная от интеграла равна подинтегральной функции, а дифференциал от интеграла равен подинтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)\, dx = f(x)dx; \quad \int dF = F(x) + C$$

Последние два соотношения подчеркивают взаимную обратность операторов дифференцирования и интегрирования. Отметим теперь **свойство линейности** неопределенного интеграла. Пусть

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C; \quad \int g(x)\, dx = G(x) + C$$

на некотором промежутке. Тогда

$$\int f(x)+g(x)\,dx = F(x)+G(x)+C; \quad \int a\cdot f(x)dx = a\cdot F(x)+C$$

Кратко: интеграл от суммы равен сумме интегралов и константу можно выносить за знак интеграла:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx; \quad \int \lambda f(x)dx = a\cdot \int f(x)\,dx$$

Следствие 2.1.4. *Интеграл от многочлена имеет следующий вид:*

$$\int (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)\,dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Линейная замена переменных. Пусть в предположении (2.1) даны числа $k, b \in \mathbb{R}$, причем $k \neq 0$. Тогда

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C. \tag{2.3}$$

Доказательство. Вычислим производную правой части, приняв за промежуточный аргумент $u = kx+b$:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)+C\right)'_x = \frac{1}{k}F(u)'_u\cdot u'_x = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot k = f(kx+b).$$

□

Уже эти простые правила значительно расширяют возможности интегрирования.

Пример 2.1.5. А. Применяя процедуру выделения полного квадрата, вычислим

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

Б. Вычислим интеграл от неправильной рациональной дроби $\frac{x^n}{x-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Так как

$$\frac{x^n}{x-1} = \frac{x^n-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x^{n-1}+\cdots+x+1+\frac{1}{x-1}$$

то

$$\int \frac{x^n\,dx}{x-1} = \frac{x^n}{n}+\cdots+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$$

В.

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int \cos^2 x\,dxdx = \int (1-\sin^2 x)dx = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

ОСНОВНАЯ

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1) \tag{2.4}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \tag{2.5}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x\,dx = e^x + C \tag{2.6}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C \tag{2.7}$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C, \quad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C \tag{2.8}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \tag{2.9}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C \tag{2.10}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\ (a \neq 0) \tag{2.11}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\ (a \neq 0) \tag{2.12}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C \tag{2.13}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\ (a \neq 0) \tag{2.14}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C,\ (a \neq 0) \tag{2.15}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \tag{2.16}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + C,\ (a \neq 0) \tag{2.17}$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C \tag{2.18}$$

$\int x \sin x\, dx = \sin x - x \cos x + C$; $\int x \cos x\, dx = \cos x + x \sin x + C$

$\int x^2 \sin x\, dx = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x + C$

$\int \sin^2 x\, dx = x/2 - \frac{\sin 2x}{4} + C$

$\int \sin^3 x\, dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$

$\int x^2 \cos x\, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x + C$

$\int \cos^2 x\, dx = x/2 + \frac{\sin 2x}{4} + C$

$\int \cos^3 x\, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + c$

$\int x e^{ax} dx = e^{ax}[x/a - 1/a^2] + C$

$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax}[x^2/a - 2x/a^2 + 2/a^3] + C$

$\int x^3 e^{ax} dx = e^{ax}[x^3/a - 3x^2/a^2 + 6x/a^3 - 6/a^4] + C$

2.2 Замена переменной в неопределённом интеграле

Определение неопределенного интеграла распространим на более общий случай: полагаем по определению

$$\int f(x)\, dg(x) = \int f(x) g'(x)\, dx$$

Таким образом, например

$$\int x^2\, dx^3 = \int x^2 \cdot 3x^2\, dx = 3 \int x^4\, dx = \frac{3}{5} x^5 + C.$$

Теорема 2.2.1 (замена переменной в неопределённом интеграле)**.**

$$\left[\int f(u)\,du\right]_{u=u(x)} = \int f(u(x))\,du(x) \tag{2.19}$$

Доказательство. Пусть $\int f(u)\,du = F(u) + C$. Тогда

$$F(u(x))'_x = F'_u(u) \cdot u'_x = f(u)u'(x) = f(u(x))u'(x),$$

что и требовалось доказать. □

В частном случае $u(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$ получаем линейную замену переменных (2.3).

Применение формулы (2.19) "слева на право" и будет означать замену переменной . Например, вычислим интеграл $\int \frac{du}{\sqrt{u}+1}$, сделав замену переменной $u = x^2$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}+1} = \int \frac{2xdx}{x+1} = \int \left(2 - \frac{2}{x+1}\right) dx = 2x - 2\ln(x+1) + C = 2\sqrt{u} - 2\ln(\sqrt{u}+1) + C.$$

Применение формулы (2.19) в обратном направлении, "справа налево" называется *занесением под знак дифференциала.* Например,

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|ax^2+bx+c| + C \tag{2.20}$$

2.2.1 Метод интегрирования функций вида $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ и $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Для интегрирования функции $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ или $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (здесь $a \neq 0$) следует проделать преобразования 1-2-3.

1. Выделяем в числителе производную квадратного трехчлена:

$$Ax + B = M(2ax+b) + N, \text{ где } M = \frac{A}{2a}, \ N = B - \frac{Ab}{2a} \tag{2.21}$$

2. Тогда

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = M\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + N\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \tag{2.22}$$

3. Для вычисления первого интеграла в (2.22) применяем занесение под знак дифференциала (см.(2.20)). Для вычисления второго интеграла выделяем в квадратном трехчлене полный квадрат и линейной заменой переменных сводим его к табличному.

Пример 2.2.2. А.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Б.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3^2} = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}(x+2) + C.$$

В.

$$\int \frac{2x-7}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx = \int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+8}}dx =$$

$$= \int \frac{d(x^2-6x+8)}{\sqrt{x^2-6x+8}} - \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-1}} = 2\sqrt{x^2-6x+8} - \ln(x-3+\sqrt{x^2-6x+8}) + C.$$

2.3 Интегрирование по частям в неопределённом интеграле

Теорема 2.3.1. *Для дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ имеет место соотношение*

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x) \tag{2.23}$$

Доказательство. Интегрируя левую и правую часть формулы $(uv)' = uv' + vu'$, получаем:

$$u(x)v(x) + C = \int uv'dx + \int vu'dx$$

Так как по определению $\int uv'dx = \int udv$ и $\int vu'dx = \int vdu$, то формула (2.23) следует. □

Пример 2.3.2. В следующем интеграле полагаем $u = \mathrm{arctg}\,x$ и $v = x$.

$$\int \mathrm{arctg}\,x\,dx = x\,\mathrm{arctg}\,x - \int x\,d\,\mathrm{arctg}\,x = x\cdot\mathrm{arctg}\,x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Метод интегрирования квазимногочленов. Квазимогочленами называется сумма функций вида Интегрируем функции вида $e^{\alpha x}P_n(x), \sin\alpha x\,\cdot P_n(x), \cos\alpha x\,\cdot P_n(x)$. Здесь и далее $P_n(x)$ – многочлен степени n. Метод интегрирования состоит в занесении экспоненты или гармоники под знак дифференциала, а затем применяется формула интегрирования по частям. Повторяем эту процедуру n раз.

Пример 2.3.3. А.

$$\int e^{-x}(x^2-4x+1)\,dx = \int x^2-4x+1)d(-e^{-x}) = e^{-x}(4x-1-x^2)+\int e^{-x}(2x-4)dx = e^{-x}(4x-1-x^2)+\int$$

$$= e^(-x)(4x-1-x^2)+e^{-x}(2x-4)+\int e^{-x}\cdot 2\,dx = e^{-x}(6x-5-x^2)-2e^{-x}+C = e^{-x}(6x-7-x^2)+C.$$

Б. Интегралы $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ можно вычислить с помощью комплексной экспоненты

$$e^{\alpha x+i\beta x} := e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

А именно,

$$\int e^{(\alpha+i\beta)x}dx = \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta} + C = e^{\alpha x}\frac{(\cos\beta x + i\sin\beta x)(\alpha - i\beta)}{\alpha^2+\beta^2} + C$$

Перемножая комплексные числа в числителе и приравнивая действительные и мнимые части, получим

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = e^{\alpha x}\cdot\frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2} + C;$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = e^{\alpha x}\cdot\frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2} + C.$$

Метод интегрирования функций вида $\ln^k xP_n(x)$ Для интегрирования таких функций заносим многочлен под знак дифференциала и применяем формулу интегрирования по частям. Процедуру повторяем k раз.

Пример 2.3.4. А.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d(\ln x) = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Б.

$$\int \ln^2 x\,dx = x\cdot\ln^2 xx - \int x\,d\ln^2 x = x\ln^2 x - \int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$$

2.4 Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется функция вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены. Если $\deg P < \deg Q$, то рациональную дробь $P(x)/Q(x)$ называют *правильной.* В противном случае ее называют *неправильной.* Итак, дробь $P(x)/Q(x)$ неправильная, если $\deg P \geq \deg Q$ как, например, у дроби $\frac{1-x^2}{(3+x)^2}$ (здесь степень числителя и знаменателя равна 2).

Теорема 2.4.1. *Любую дробь можно разложить в сумму многочлена и правильной рациональной дроби.*

Доказательство. Пусть $P(x)/Q(x)$ – неправильная рациональная дробь. Поделим числитель на знаменатель с остатком: $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$. Здесь $D(x), R(x)$ – многочлены, причем $\deg R < \deg Q$ (*). Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot D(x) + R(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Дробь $R(x)/Q(x)$ правильная в силу неравенства (*) . $\square$

Следующие рациональные дроби называют *простейшими*

(1 тип) $\frac{A}{ax+b}$, $(a \neq 0,\ A \neq 0)$

(2 тип) $\frac{A}{(ax+b)^n}$, $(n > 1,\ a \neq 0,\ A \neq 0)$

(3 тип) $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, $(b^2 - 4ac < 0,\ (A, B) \neq (0, 0))$

(4 тип) $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, $(b^2 - 4ac < 0,\ n > 1,\ (A, B) \neq (0, 0))$

Теорема 2.4.2. *Любую правильную рациональную дробь можно разложить в сумму простейших.*

Алгоритм разложения.

а) Знаменатель правильной дроби $P(x)/Q(x)$ раскладываем в произведение неприводимых многочленов (линейных и квадратичных с отрицательным дискриминантом):

$$Q(x) = (a_1x + b_1)^k \ldots (ax^2 + bx + c)^m \ldots$$

Здесь $a_1 \neq 0$, $b^2 - 4bc < 0$ и k, m – кратности соответствующих корней.

б) Раскладываем дробь $P(x)/Q(x)$ в сумму простейших с неопределенными коэффициентами по следующим принципам: множителю $(a_1x + b_1)^k$ соответствует k простейших дробей первого и второго типов с неопределенными коэффициентами в числителе:

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(a_1x + b_1)^k}$$

множителю $(ax^2 + bx + c)^m$ соответствует m простейших дробей третьего и четвертого типов:

$$\frac{M_1x + N_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{M_2x + N_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{M_mx + N_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

Так мы поступаем для каждого линейного множителя и для каждого квадратичного множителя.

в) Получившееся разложение умножаем на общий знаменатель $Q(x)$, и неопределенные коэффициенты отыскиваем из условия тождественности левой и правой части. Действуем комбинацией двух методов

- в получившееся равенство подставляем вместо x корни знаменателя $Q(x)$ как действительные так и комплексные;
- в получившемся равенстве приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

Пример 2.4.3. А. Разложим дробь $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ в сумму простейших

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Отсюда следует, что $2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$. Подставляя в это соотношение $x = 1, x = 2, x = 3$ находим сразу $A = 1; B = -2; C = 1$. Итак

$$\int \frac{2dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-2dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} = \ln\left|\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}\right| + C$$

Б. Разложим рациональную дробь $f = \frac{36+20x}{(x-1)(x^2-1)^2}$ в сумму простейших. Разложение этой дроби с неопределенными коэффициентами имеет вид $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}$ Умножая на общий знаменатель, получаем соотношение

$$36 + 20x = A(x^2-1)^2 + B(x-1)(x+1)^2 + C(x+1)^2 + D(x-1)^3 + E(x-1)^3(x+1)$$

Подставляя сюда $x = 1$, находим $56 = 4C$, откуда $C = 14$. Подставляя $x = -1$ находим $D = 16/(-2)^3 = -2$. Приравнивая коэффициенты при x^4, x^3, x^2 получаем систему

$$\begin{cases} 0 = A + E \\ 0 = B + D + E(1-3) = B - 2 - 2E \\ 0 = -2A + B(-1+2) + C - 3D + E(-3+3) = -2A + B + 14 + 6 \end{cases}$$

Отсюда $E = -A$ и $2A + B = 2$; $-2A + B = -20$. Складывая равенства последней системы, получаем $2B = -18$ и $B = -9$. Тогда $A = (2-B)/2 = 11/2 = -E$ и

$$f = \frac{14}{(x-1)^3} - \frac{9}{(x-1)^2} + \frac{11/2}{x-1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{11/2}{x+1}$$

Следовательно,

$$\int \frac{36+20x}{(x-1)(x^2-1)^2}dx = -\frac{7}{(x-1)^2} + \frac{9}{x-1} + \frac{11}{2}\ln|x-1| + \frac{2}{x+1} - \frac{11}{2}\ln|x+1| + C$$

2.4.4. Обобщить результат примера А и доказать равенство

$$\frac{n!}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{C_n^k}{x-k}$$

2.4.1 Метод интегрирования простейших дробей 4 типа.

Алгоритм интегрирования этих дробей состоит в следующем.

а) Выделяя в числителе производную знаменателя, разложим интеграл $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ в сумму двух интегралов.

б) Первый из получившихся интегралов, после занесения под знак дифференциала, станет табличным.

в) Во втором в знаменателе выделяем полный квадрат и сводим вычисление к интегралу вида $\int \frac{dx}{(x^2+k^2)^n}$. К этому интегралу применяем следующую рекуррентную процедуру

$$\int \frac{dx}{(x^2+k^2)^n} = \frac{1}{k^2}\int \frac{(x^2+k^2-x^2)dx}{(x^2+k^2)^n} = \frac{1}{k^2}\cdot\int \frac{dx}{(x^2+k^2)^{n-1}} - \frac{1}{2k^2}\cdot\int \frac{xd(x^2+k^2)}{(x^2+k^2)^n}$$

К последнему интегралу применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int \frac{xd(x^2+k^2)}{(x^2+k^2)^n} = \frac{1}{1-n}\int x\,d\frac{1}{(x^2+k^2)^{n-1}} = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{x}{(x^2+k^2)^{n-1}} + \frac{1}{n-1})\int \frac{dx}{(x^2+k^2)^{n-1}}$$

Итак, если обозначить $I_n(k) = \int \frac{dx}{(x^2+k^2)^n}$, то

$$I_n(k) = \frac{1}{k^2}I_{n-1}(k) - \frac{1}{2k^2}\left[\frac{1}{1-n}\cdot\frac{x}{(x^2+k^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}I_{n-1}(k)\right] =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[1+\frac{1}{2(1-n)}\right]I_{n-1}(k) - \frac{1}{2k^2}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{x}{(x^2+k^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{2n-3}{2k^2(n-1)}\cdot I_{n-1}(k) + \frac{x}{2k^2(n-1)(x^2+k^2)^{n-1}}$$

Окончательно:

$$I_n(k) = \frac{2n-3}{2k^2(n-1)}\cdot I_{n-1}(k) + \frac{x}{2k^2(n-1)(x^2+k^2)^{n-1}} \tag{2.24}$$

Соотношение (2.24) представляет собой рекуррентную формулу вычисления интегралов $I_n(k)$ с учетом начального значения $I_1(k) = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k} + C$.

Пример 2.4.5.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2(2-1)}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(2-1)(x^2+1)} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{2\cdot 3-3}{2(3-1)}\cdot\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{2(3-1)(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + C = \frac{3\operatorname{arctg} x}{8} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + C$$

2.5 Интегрирование иррациональных выражений

Далее R *рациональная функция* одной или нескольких переменных.

Интегралы вида $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}})\,dx$, где $\frac{m}{n}, ..., \frac{r}{s}$ – рациональные числа с общим знаменателем k сводятся к интегралу от рациональной функции заменой

$$x = z^k \Leftrightarrow z = \sqrt[k]{x} \tag{2.25}$$

Тогда

$$dx = kz^{k-1}dz,\ x^{\frac{m}{n}} = z^{\frac{km}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}} = z^{\frac{rk}{s}} \tag{2.26}$$

– рациональные выражения, следовательно получается интеграл от рациональной дроби:

$$\int R(z^k, z^{\frac{km}{n}}, ..., z^{\frac{kr}{s}})z^{k-1}\,dz$$

Вычислив этот интеграл и сделав обратную замену $z = \sqrt[k]{x}$, получим ответ.

Пример 2.5.1. А

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}} =_{\{x=z^6\}} = \int \frac{z^3 6z^5\,dz}{1+z^2} =$$

$$= \int \frac{6(z^8-1+1)\,dz}{1+z^2} = 6\int \left((z^2-1)(z^4+1) + \frac{1}{1+z^2}\right)dz =$$

$$= 6\int (z^6 - z^4 + z^2 - 1)\,dz + \int \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \frac{6}{7}z^7 - \frac{6}{5}z^5 + 2z^3 - 6z + 6\,\mathrm{arctg}\,z + C =$$

$$\boxed{= \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\frac{x}{\sqrt[6]{x}} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x} + C}$$

Б. Вычислим интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}} = [x = t^6] = \int \frac{t^2 \cdot 6t^5 dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2 \cdot 3t^4 dt^2}{1+t^2} = [u = t^2] =$$

$$= \int \frac{3u^3 du}{1+u} = \int (1-u+u^2)\,du - \int \frac{3du}{1+u} = 3u - \frac{3}{2}u^2 + u^3 - \ln|1+u| + C =$$

$$= 3\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + x - \ln(1+\sqrt[3]{x}) + C$$

Аналогично, интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx,$$

где $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, а k имеет тот же смысл, сводятся к интегралам от рациональной дроби заменой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^k \Leftrightarrow x = \frac{b - z^k d}{z^k c - a} \Leftrightarrow z = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Пример 2.5.2.

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx =$$

$$\left\{ \text{замена } \frac{x+1}{x-1} = z^2,\ x = \frac{1+z^2}{z^2-1} = 1 + \frac{2}{z^2-1} \right\} =$$

$$= \int z\, d\frac{2}{z^2-1} = \frac{2z}{z^2-1} - \int \frac{2dz}{z^2-1} =$$

$$= \frac{2z}{z^2-1} - \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \frac{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{x+1}{x-1} - 1} - \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}\right| + C =$$

$$= \frac{(x-1)2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{2} - \ln\left|\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\right| + C$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \ln\frac{|x+1-2\sqrt{x^2-1}+x-1|}{2} + C =$$

$$\sqrt{x^2-1} - \ln|x - \sqrt{x^2-1}| + C,$$

где мы применили свойство *дифференциал константы равен 0*, формулу интегрирования по частям, а также числитель и знаменатель выражения под логарифмом умножили на $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$. Более простой метод интегрирования (но требующий догадки) этой же функции таков:

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} - \ln(x + \sqrt{x^2-1}) = \sqrt{x}$$

2.6 Интегрирование тригонометрических выражений

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ сводятся к интегралам от рациональной функции *универсальной заменой*

$$z = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg} z$$

называемой *универсальной тригонометрической подстановкой.* Действительно,

$$\sin x = \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{2z}{1+z^2}; \quad \cos x = \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{1-z^2}{1+z^2};$$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2},$$

поэтому получаем интеграл от рационального выражения

В частных случаях $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ и $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)\,dx$ лучше пользоваться заменами $z = \cos x$, $z = \sin x$ и $z = \operatorname{tg} x$ соответственно.

Пример 2.6.1. А.

$$\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x} = \{z = \operatorname{tg} x/2\} =$$

$$= \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{4z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{4z + 1 - z^2} = \int \frac{dz}{(\sqrt{3})^2 - (z-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2-\sqrt{3}}{z-2+\sqrt{3}}\right| + C = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2 + \sqrt{3}}\right| + C}$$

Б.

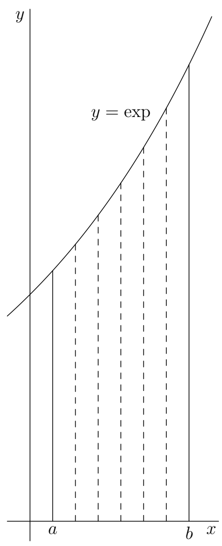
$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\,d(\cos x) = \int 1 - \cos^2 x\,d(\cos x) = \boxed{\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C}$$

Глава 3

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1 Определенный интеграл Римана

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и неотрицательна (считаем $a < b$). Фигура, заданная неравенствами $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ называется криволинейной трапецией (см. рис. справа). Идея вычисления состоит в том, чтобы нарезать эту трапецию на узенькие вертикальные полоски, площадь каждой полоски считать как площадь прямоугольника, а затем сложить получившиеся результаты. Мы получим приближенный ответ. Для получения точного ответа надо брать полоски все уже и уже и перейти к пределу, когда максимальная ширина полоски стремится к нулю.



Вычислим таким образом площадь под экспонентой $y = e^x$, при условии $a \le x \le b$. Возьмём равномерное разбиение отрезка $[a,b]$ на n частей:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;\ \Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n};\ x_i = a + i\Delta x$$

Тогда

$$s_n = e^a\Delta x + e^{a+\Delta x}\Delta x + \cdots + e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x =$$

$$= e^a(1 + e^{\Delta x} + \cdots + e^{(n-1)\Delta x})\Delta x = e^a\frac{1-e^{n\Delta x}}{1-e^{\Delta x}}\Delta x =$$

$$(e^b - e^a)\frac{\Delta x}{1-e^{\Delta x}} \longrightarrow e^b - e^a \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Здесь использована формула суммы геометрической прогрессии, а также эквивалентность бесконечно малых $e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x$ при $\Delta x \to 0$. Доказано, что $S = e^b - e^a$.

Перейдем к точным определениям. Пусть $[a,b]$ отрезок на вещественной прямой. Предполагаем, что $a \le b$. Набор чисел $(x_i)_{0\le i\le n}$ такой, что

$$a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b \tag{3.1}$$

назовём *разбиением отрезка* $[a,b]$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(1 \le i \le n)$. Величину

$$\lambda = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$$

назовём *параметром разбиения.* Набор точек $(\xi_i)_{1\le i\le n}$ такой, что $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех i, назовём *системой отмеченных точек.* Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – функция. Тогда величина

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{3.2}$$

называется *интегральной суммой.*

Определение 3.1.1. *Определённым интегралом функции $f(x)$ по отрезку* $[a,b]$ называется предел интегральных сумм, если параметр разбиения стремиться к нулю. Обозначим этот интеграл так: $\int_a^b f(x)\,dx$. Итак, число I есть интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ $(a < b!)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\lambda(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения (3.1) параметр которого меньше $\lambda(\varepsilon)$ и для любой системы отмеченных точек (ξ_i) имеет место неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *подинтегральной*, $f(x)dx$ называется *подинтегральным выражением.* Число a называется *нижним пределом интегрирования*, а b – *верхним пределом интегрирования.*

Распространим понятие интеграла на случай отрезка, вырождающегося в точку, полагая по определению $\int_a^a f\,dx = 0$. Распространим понятие интеграла также на тот случай, когда нижний предел больше верхнего; считаем по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$$

Замечание 3.1.2. Из условия $\lambda \to 0$ вытекает, что $n \to \infty$, но обратное неверно.

Так как предел не всегда существует, то и определенный интеграл на отрезке $[a,b]$ существует не от любой функции. Если интеграл $\int_a^b f\,dx$ существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой (по Риману) на отрезке* $[a,b]$.

Необходимым условием существования интеграла является ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Действительно, если функция $f(x)$ неограничена, например, сверху, то при любом разбиении, каков бы ни был малый его параметр, найдутся отмеченные точки (ξ_i) такие, что интегральная сумма (3.2) больше чем любая наперед заданная величина. Следовательно, конечного предела интегральные суммы иметь не могут.

Свойство линейности. Сумма интегрируемых функций есть интегрируемая функция и произведение интегрируемой функции на число есть также интегрируемая функция. Более того, если $f(x), g(x)$ интегрируемы, то для любых чисел α, β линейная комбинация $\alpha f(x) + \beta g(x)$также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

Это свойство эквивалентно двум правилам: 1) интеграл от суммы функций равен сумме интегралов и 2) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. Свойство линейности следует из соответствующих свойств предела – предел суммы равен сумме пределов, и постоянный множитель можно вносить за знак предела.

Изменение ориентации. Равенство $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$ справедливо вне зависимости от расположения точек a и b на числовой прямой.

Не чувствительность интеграла к изменению значений подинтегральной функции в конечном числе точек: на существование и на значение определенного интеграла не влияет изменение значения функции $f(x)$ в конечном числе точек.

Аддитивность интеграла. Пусть $a < c < b$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ в том и только том случае, когда она интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$. В этом случае

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \tag{3.3}$$

Если точки a, b, c расположены произвольно на числовой прямой и каждый из интегралов в (3.3) существует, то равенство (3.3) имеет место.

Рассмотрим основной случай: $a < c < b$. Интегральные суммы функции $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ обозначим $I[a, c]$ и $I[c, b]$ соответственно, а параметры разбиения на этих отрезках обозначим λ_1, λ_2. Тогда, включая точку c, если надо, в число точек разбиения отрезка $[a; b]$, получаем, что $I[a, c] + I[c, b]$ будет интегральной суммой функции f на отрезке $[a, b]$ с параметром разбиения $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Если $\lambda \to 0$, то $\lambda_1 \to 0$ и $\lambda_2 \to 0$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda\to}(I[a, c] + I[c, b]) = \lim_{\lambda_1\to} I[a, c] + \lim_{\lambda_2\to} I[c, b] = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx$$

Далее следует рассмотреть множество случаев взаимного расположения точек a, b, c. Ограничимся одним случаем: $c < a < b$. Тогда по условию и доказанному выше имеет место равенство $\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$. Перенося $\int_c^a f(x)dx$ в левую часть и заменяя $-\int_c^a f(x)dx$ на $\int_a^c f(x)dx$ получаем $\int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, что совпадает с (3.3).

Аналогично разбираются другие случаи расположения точек a, b, c.

Монотонность интеграла. Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a, b]$ и $a \le b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Действительно, в этом случае

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

и переходя к пределу $\lambda \to 0$ в этом неравенстве, получаем искомое соотношение между интегралами.

Интеграл от единицы. Отметим одно простое равенство, вытекающее из определения определенного интеграла:

$$\int_a^b dx = b - a. \tag{3.4}$$

Оценка интеграла. Если $m \le f(x) \le M$ на отрезке $[a, b]$ и $a \le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \tag{3.5}$$

Действительно,

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M\int\limits_a^b dx = M(b-a).$$

Здесь мы последовательно применили монотонность интеграла, его линейность и равенство (3.4). Аналогично доказывается первое из неравенств в (3.5).

Например, $\frac{1}{2\sqrt{7}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \le 1$ на отрезке $[0; 3]$, что следует из монотонности функции x^3, а, значит, и функции $1/\sqrt{1+x^3}$. Отсюда

$$\frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{7}} \le \int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \le 1 \cdot 3 = 3.$$

Теорема 3.1.3 (о среднем). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдётся точка $c \in [a, b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Считаем $a < b$. Пусть $m = \min_{[a,b]} f$, $M = \max_{[a,b]} f$ (теорема Вейерштрасса). Тогда

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

откуда $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$. По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении, найдется точка $c \in [a;b]$ для которой

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

$\square$

Величина $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ называется *интегральным средним функции f на отрезке* $[a,b]$.

Пример 3.1.4. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x \le 1 \\ 2, & \text{если } 1 < x \le 2 \end{cases} \tag{3.6}$$

Тогда интегральное среднее функции (3.6) на отрезке $[0;2]$ равно

$$1/(2-0)\int\limits_0^2 f(x)dx = 1/2\int_0^1 dx + 1/2\int_1^2 2dx = 1/2 + (2\cdot(2-1))/2 = 3/2$$

Однако точки $c \in [0;2]$ такой, что $f(c) = 3/2$ нет. Причина этого – разрыв функции $f(x)$ в точке 1.

3.1.1 Суммы Дарбу

Рассмотрим случай, когда функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена на отрезке $[a,b]$ (считаем, что $a \le b$). Тогда для разбиения $\tau = (x_i)$ этого отрезка определены числа $m_i = \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$ и $M_i = \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$. Величины

$$s_\tau = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \qquad S_\tau = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

называются *нижней и верхней интегральной суммой* соответственно.

Лемма 3.1.5. ***А.*** *Спраиедливо неравенство для любой системы отмеченных тоек*

$$s_\tau \le \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \le S_\tau.$$

Б. *При измельчении разбиения нижняя интегральная сумма не уменьшается, а верхняя не увеличивается.*

Следствие 3.1.6. *Существуют пределы*

$$\underline{S} = \lim_{\lambda\to 0} s_\tau; \qquad \overline{S} = \lim_{\lambda\to 0} S_\tau.$$

Эти пределы называются *нижним и верхним интегралом функции* $f(x)$.

Предложение 3.1.7. *Интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *существует тогда и только тогда, когда нижний интеграл совпадает с верхним интегралом. В этом случае все три интеграла совпадают.*

Доказательство. Импликация "тогда" следует из теоремы о пределе промежуточной последовательности. Докажем обратную импликацию.

Пусть интеграл равен J. Предположим, что $\underline{S} \neq \overline{S}$. Тогда $\overline{S} - \underline{S} = k > 0$, и, кроме того, $\underline{S} \leq J \leq \overline{S}$ согласно лемме 3.1.5. Выберем разбиение τ отрезка $[a,b]$ с таким малым значением параметра λ, что $|s_\tau - \underline{S}| < k/6$, $\left|S_\tau - \overline{S}\right| < k/6$ и

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < k/6 \tag{3.7}$$

для любой системы отмеченных точек. Можно выбрать системы (ξ_i) и (ν_i) отмеченных точек так, что

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - s_\tau\right| < k/6, \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} f(\nu_i)\Delta x_i - S_\tau\right| < k/6$$

Из (3.7) следует, что $|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| < k/3$. Тогда

$$k = \overline{S} - \underline{S} \leq \left|\overline{S} - S_\tau\right| + \left|S_\tau - \sum f(\xi_i)\Delta x_i\right| + \left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i - \sum f(\nu_i)\Delta x_i\right| +$$

$$+\left|\sum f(\nu_i)\Delta x_i - s_\tau\right| + |s_\tau - \underline{S}| < \frac{k}{6} + \frac{k}{6} + \frac{k}{3} + \frac{k}{6} + \frac{k}{6} = k,$$

т. е. $k < k$. Это противоречие показывает, что на самом деле нижний интеграл равен верхнему интегралу. □

Пример 3.1.8. Пусть

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ - рационально} \\ 1, & x \text{ - иррационально} \end{cases}$$

- *функция Дирихле.* Эта функция не интегрируема ни на каком отрезке, так как $\underline{S} = 0$, но $\overline{S} = 1$.

Функция называется *кусочно-непрерывной на отрезке*, если этот отрезок можно разбить на конечное число подотрезков, на нвнутренности каждого из которых функция непрерывна, а в точках "стыковки" функция имеет конечные односторонние пределы. Например, таковой будет функция $y = [x]$ – целая часть числа x рассматриваемая на любом отрезке.

Теорема 3.1.9. *Кусочно-непрерывная функция интегрируема на любом отрезке.*

Доказательство. Свойства г) и д) первичных свойств интеграла Римана позволяют свести доказательство теоремы к случаю, когда $f(x)$ – непрерывная функция. Тогда, пользуясь тем, что непрерывная на компакте (отрезке) функция равномерно непрерывна, получаем, что разность $S_\tau - s_\tau$ можно сделать сколь угодно малой, выбирая достаточно малое значение параметра разбиения. Остаётся применить предложение 3.1.7. □

3.2 Формула Ньютона-Лейбница

Интеграл вида

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

называют *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 3.2.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$ и интегрируема на отрезке $[a; b]$. Тогда*

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x (x_0) = f(x_0).$$

В частности, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\Phi(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (в концах отрезка имеется ввиду совпадение односторонних производных со значениями функции $f(x)$).

Доказательство. Пусть $x, x + \Delta x \in (a, b)$. Тогда по теореме о среднем

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi_{\Delta x}) \cdot \Delta x$$

для некоторой точки $\xi_\Delta x \in (x, x + \Delta x)$. Следовательно, $\Delta\Phi/\Delta x = f(\xi_\Delta x) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$, ибо в этом случае $\xi_\Delta x \to x$, а функция $f(x)$ непрерывна. □

Теорема 3.2.2 (формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\,\big|_a^b$$

Доказательство. Для функции $f(x)$ имеем в распоряжении две первообразных $F(x)$ и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. По теореме 2.1.2 о первообразных найдется константа C такая, что

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \tag{3.8}$$

Подставим в соотношение (3.8) вместо x сначала a, получим $C = -F(a)$, а затем подставим $x = b$ – получим $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) + \; = F(b) - F(a)$, что и требовалось доказать □

Площадь под экспонентой теперь можно вычислить гораздо проще:

$$\int_a^b e^x\,dx = e^x\,\Big|_a^b = e^b - e^a.$$

3.3 Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле

Теорема 3.3.1 (замена переменной). *Пусть* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *- непрерывно дифференцируемое отображение, а* $f \in C[a, b]$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда, согласно формуле производной сложной функции, $F(\varphi(t))$ есть первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Применим формулу Ньютона-Лейбница дважды:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi(\beta)) = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

– что и требовалось доказать. □

Вычислим площадь верхнего полукруга радиуса R.

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2}dx =_{x=R\cos t}= \int_\pi^0 R\sin t\,d(R\cos t) = -R^2\int_\pi^0 \sin^2 t\,dt =$$

$$= R^2\int_0^\pi \frac{1-\cos t}{2}dt = \frac{\pi R^2}{2}$$

Теорема 3.3.2 (интегрирование по частям). *Пусть* u *и* v *– дифференцируемые функции на отрезке* $[a, b]$. *Тогда*

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \tag{3.10}$$

Доказательство. Соотношение $(uv)' = u'v + vu$ проинтегрируем от a до b; получим

$$u(x)v(x)|_a^b = \int\limits_a^b v(x)\,du(x) + \int\limits_a^b u(x)\,dv(x),$$

что эквивалентно (3.10). □

Пример 3.3.3. Вычислим площадь $S(b)$ под кривой $y = xe^{-x}$ на отрезке от 0 до $b > 0$.

$$S(b) = \int_0^b xe^{-x}dx = \int_0^b x\,d(-e^{-x}) = -xe^{-x}\,|_0^b + \int_0^b e^{-x}\,dx =$$

$$= -be^{-b} + (-e^{-b} + e^0) = 1 - (b+1)e^{-b}.$$

Заметим, что $S(b) \to 1$ при условии $b \to +\infty$.

3.4 Несобственные интегралы

Пусть функция f задана на полуинтервале $[a, d)$, где $a \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a < d$ и интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом $a \le b < d$. Полагаем по определению

$$\int\limits_a^d f(x)\,dx = \lim_{b \to d-0} \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{3.11}$$

и называем это число *несобственным интегралом.* В случае, когда предел (3.11) существует, то говорим, что соответствующий интеграл *сходится*; в противном случае будем говорить, что интеграл $\int_a^d f(x)\,dx$ *расходится.*

Несобственный интеграл (3.11) применяется в двух типичных ситуациях.

1) $d = +\infty$. Если к тому же $f(x) \ge 0$ на $[a, +\infty)$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – площадь неограниченной криволинейной фигуры (см. рис. 3.1).

2) $d \in \mathbb{R}$ и $\lim_{x \to d-0} f(x) = \pm\infty$. И в этом случае, если $f(x) \ge 0$ на $[a, d)$, то $\int_a^d f(x)\,dx$ – площадь еограниченной фигуры.

Отметим, что если функция f на самом деле интегрируема на отрезке $[a, d]$ (это означает, в частности, что $d \in \mathbb{R}$), то коллизии обозначений не возникает – несобственный интеграл в смысле (3.11) будет равен определенному интегралу функции f на отрезке $[a, d]$.

Аналогично определяется несобственный интеграл для функций определенных на полуинтервале $(c, b]$, где $c < b,\ c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

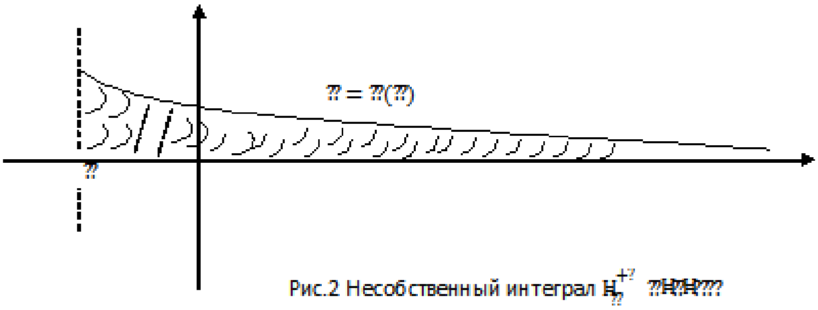


Рис. 3.1: Площадь неограниченной фигуры

Пусть теперь функция f интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, лежащем в интервале (c, d). Предполагаем, что $c < d$ – числа из расширенной вещественной прямой. Тогда *несобственный интеграл* $\int_c^d f(x)\,dx$ можно определить либо как двойной предел

$$\int\limits_c^d f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to c+0\\ b\to d-0}} \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{3.12}$$

либо выбрать произвольно $a \in (c, d)$ и положить

$$\int\limits_c^d f(x)\,dx = \int\limits_c^a f(x)\,dx + \int\limits_a^d f(x)\,dx \tag{3.13}$$

Вопрос 3.4.1. Доказать, что определения (3.12) и (3.13) эквивалентны. В частности, (3.13) не зависит от выбора точки a.

Пример 3.4.2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - \lim_{c\to-\infty} \operatorname{arctg} c = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi.$$

В предыдущем параграфе мы фактически вычислили несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x} dx = 1.$$

Во-первых, отметим **свойство линейности несобсвенных интегралов**. *Если интегралы $\int_c^d f(x)\,dx$, $\int_c^d g(x)dx$ сходятся, то сходится также и интеграл $\int_c^d kf(x)+mg(x)\,dx$, и он равен $k\int_c^d f(x)\,dx + m\int_c^d g(x)\,dx$.*

Это свойство вытекает из свойства линейности определённого интеграла и свойства линейности предельного перехода.

Теорема 3.4.3 (Формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов)**.** *Пусть $F(x)$ – первообразная непрерывной функции $f(x)$ на интервале (c,d). Предположим, что существуют пределы*

$$F(c)=\lim_{x\to c+0}F(x);\quad F(d)=\lim_{x\to d-0}F(x)$$

Тогда несобственный интеграл $\int_c^d f(x)\,dx$ сходится, причём

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(a) \tag{3.14}$$

Свойство аддитивности несобственных интегралов. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ для фиксированного a и любого b такого, что $a\le b<d$. Выберем точку $c\in[a,d)$. Несобственный интеграл $\int_a^d f(x)\,dx$ сходится в том и только том случае, если сходится несобственный интеграл $\int_c^d f(x)\,dx$. При этом условии имеет место равенство

$$\int\limits_a^d f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^d f(x)\,dx.$$

Пример 3.4.4. Докажем

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx=n!$$

Действительно, обозначим $Fac(n):=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$. При $n=0$ получаем верно равенство $Fac(0)=1=0!$. Далее

$$Fac(n{+}1)=\int\limits_0^{+\infty}x^{n+1}e^{-x}dx=-\int\limits_0^{+\infty}x^{n+1}de^{-x}=-x^{n+1}e^{-x}|_0^{+\infty}+(n{+}1)\int\limits_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx=(n{+}1)Fac(n)$$

Метод математической индукции дает совпадение $Fac(n)=n!$.

Теорема 3.4.5 (сравнения). *Пусть $0\le f(x)\le g(x)$ на интервале (c,d). Тогда*

1) если $\int_c^d g(x)\,dx$ сходится, то $\int_c^d f(x)\,dx$ сходится;

2) если $\int_c^d f(x)\,dx$ расходится, то $\int_c^d g(x)\,dx$ расходится.

Доказательство. 1) Если $\int_c^d g(x)\,dx$ сходится, то существует (конечная) площадь криволинейной трапеции T под графиком функции $y=g(x)$. Криволинейная трапеция под графиком функции $y=f(x)$ содержится в T, следовательно и у нее площадь также конечна. Тем самым интеграл $\int_c^d f(x)\,dx$ сходится.

Утверждение 2) следует из 1) в силу логического принципа: импликация $A \Rightarrow B$ эквивалентна импликации $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (черта сверху – отрицание утверждения). Более подробно: если бы интеграл $\int_c^d g(x)\,dx$ сходился, то и интеграл $\int_c^d f(x)\,dx$ также бы сходился, согласно первому утверждению. Это, однако, противоречит условию. Противоречие показывает, что интеграл $\int_c^d g(x)dx$ должен расходится. □

Следствие 3.4.6. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ кусочно непрерывны и имеют неотрицательные значения на полуинтервале $[a, d)$. Предположим, что существует предел $\lim_{x\to d-0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём он отличен от 0. Тогда интегралы $\int_a^d g(x)\,dx$ и $\int_a^d f(x)\,dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.*

Аналогичное утверждение имеет место для полуинтервала $(c, b]$.

Предложение 3.4.7 (об "эталонных" интегралах). *Пусть $a > 0$.*

1. *Интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.*

2. *Интеграл $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$.*

Доказательство. 1. Если $p > 1$, то первообразная $\frac{1}{1-p}x^{p-1}$ подинтегральной функции $1/x^p$ имеет конечный предел 0 при $x \to +\infty$. По формуле Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов, получаем, что интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится и равен $\frac{1}{p-1}a^{p-1}$).

Если $p = 1$, то первообразной подинтегральной функции служит $\ln x$, который не имеет конечного предела на $+\infty$. Для $p < 1$ то же самое можно сказать о первообразной $x^{1-p}/(1-p)$.

Аналогично, прямыми вычислениями доказывает второе утверждение. □

Пример 3.4.8. **А.** Исследуем на сходимость $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

Так как $\frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1} \sim \sqrt{x}$ при $x \to 0$, а интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (предложение 3.4.7), то и исходный интеграл сходится.

Б. Докажем, что интеграл $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ сходится и вычислим его.

$$\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int\limits_0^{1/e} \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dz}{z^2} = 1$$

3.4.1 Абсолютная сходимость

Теорема сравнения и ее следствие применимы только к неотрицательным функциям. Как исследуется на сходимость несобственный интеграл $\int_a^c f(x)dx$ в случае функции $f(x)$, меняющей знак на полуинтервале $[a, c)$? Заметим, что если от функции $f(x)$ перейти к ее модулю $|f(x)|$, то условие неотрицательности будет соблюдено.

Предложение 3.4.9. *Если интеграл от модуля функции сходится, то и интеграл от самой функции также сходится.*

Доказательство. Итак, нам известно, что интеграл $\int_a^c |f(x)|\,dx$сходится. Из неравенств $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ следует $0 \leq f(x)+|f(x)| \leq 2|f(x)|$ (прибавили ко всем частям величину $|f(x)|$). Из сходимости $\int_a^c |f(x)|\,dx$ вытекает сходимость $\int_a^c 2|f(x)|\,dx$ (свойство линейности). Тогда по теореме сравнения получаем, что и интеграл $\int_a^c f(x)+|f(x)|dx$сходится. Разность двух сходящихся интегралов $\int_a^c f(x)+|f(x)|\,dx$ и $\int_a^c |f(x)|\,dx$ дает сходящийся интеграл $\int_a^c f(x)\,dx$, что и требовалось доказать. □

Определение 3.4.10. Несобственный интеграл $\int_a^c f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если интеграл $\int_a^c |f(x)|\,dx$ сходится. В случае, когда несобственный интеграл $\int_a^c f(x)\,dx$ сходится, но не сходится абсолютно, то интеграл $\int_a^c f(x)\,dx$ называют *условно сходящимся.*

Пример 3.4.11. Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится условно. Обозначим $S_k = \int_{\pi(k-1)}^{\pi k} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$. Геометрический аналог этого утверждения заключается в том, что суммарная площадь $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$ равна бесконечности, хотя знакочередующийся ряд $S_1 - S_2 + S_3 - \ldots$ сходится (см. рис. 3.2).

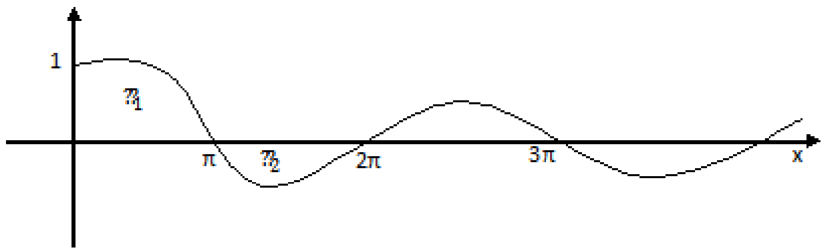


Рис. 3.2: Условно сходящийся интеграл

Действительно, для $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\int_\varepsilon^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_\varepsilon^b \frac{d(-\cos x)}{x} = \frac{-\cos x}{x}\Big|_\varepsilon^b + \int_\varepsilon^b \cos x\, d(1/x) = \frac{-\cos x}{x}\Big|_\varepsilon^b - \int_\varepsilon^b \frac{\cos x\, dx}{x^2} \tag{3.15}$$

Так как $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq 1/x^2$ и интеграл $\int_\varepsilon^{+\infty} dx/x^2$ сходится, то при $b \to +\infty$ правая часть в (3.15) имеет предел. Следовательно, и левая часть $\int_\varepsilon^b \frac{\sin x}{x} dx$ имеет предел при $b \to +\infty$. Итак, интеграл $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится. Точка 0 – устранимая особенность функции $\frac{\sin x}{x}$ в силу первого замечательного предела. Доопределяя эту функцию в нуле единицей, получаем непрерывную функцию на отрезке $[0, \varepsilon]$. Тем самым интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится в силу аддитивности несобственных интегралов.

Докажем, что интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ расходится. Предположим противное – он сходится. Тогда замена $t = x + \pi/2$ и эквивалентность $1/(t - \pi/2) \sim 1/t$ на бесконечности показывают, что и интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t}\right| dt$ будет сходится . Так как

$$\frac{1}{x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x| + |\cos x|}{x} = \frac{|\sin x|}{x} + \frac{|\cos x|}{x},$$

то по теореме сравнения получается, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ также сходится, что противоречит утверждению об эталонных интегралах.

3.5 Интегралы, зависящие от параметра

Интеграл вида

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha)\, dx \tag{3.16}$$

называется *интегралом, зависящий от параметра* α. В общем случае нижний и верхний пределы также могут зависеть от параметра α: $a = a(\alpha)$, $b = b(\alpha)$.

Теорема 3.5.1 (Лейбница дифференцирования по параметру). *Пусть функции* $f(x, \alpha)$, $f'(x, \alpha)$ *непрерывны при* $a \leq x \leq b$, $c \leq \alpha \leq d$. *Тогда*

$$I'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx \tag{3.17}$$

для любого $\alpha \in (c, d)$.

Вопрос 3.5.2. Доказать общую формулу дифференцирования по параметру:

$$\left(\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx\right)'_\alpha = \int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + f(b(\alpha), \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a(\alpha), \alpha)\frac{da}{d\alpha}$$

Пример 3.5.3. Обозначим $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin \alpha x}{x} dx$. Тогда

$$I'(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 + 1} \Rightarrow I(\alpha) = \operatorname{arctg} \alpha$$

Замена $t = x\alpha$ сводит этот интеграл к интегралу вида $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t/\alpha}\frac{\sin t}{t} dt$. Полагая здесь $\alpha = +\infty$, получаем **интеграл Дирихле**:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

3.5.1 Гамма-функция Эйлера

Гамма-функция Леонардо Эйлера – это функция вида

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \quad \alpha > 0 \tag{3.18}$$

Заметим прежде всего, что интеграл (3.18) сходится при всех $\alpha > 0$. Действительно, представим его в виде суммы

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

Первый из этих интегралов сходится так как

$$0 < \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx < \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\,dx = 1/\alpha$$

Второй интеграл сходится, так как при $x \to +\infty$ имеет место оценка $e^x >> x^{-1-\alpha}$. Следовательно,

$$x^{\alpha-1}e^{-x} < x^{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{x^2}$$

а интеграл от последней функции сходится на $+\infty$.

Свойства гамма-функции

1. *Основное функциональное уравнение.*

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

при любом $\alpha > 1$.

2. *Для любого натурального* n $\Gamma(n) = (n-1)!$. *В частности,* $\Gamma(1) = 1$.

3. *Гамма-функция непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков. Например,*

$$\Gamma'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln x)e^{-x}\,dx$$

$$\Gamma''(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\ln^2 x)e^{-x}\,dx$$

Лемма 3.5.4 (Интеграл Эйлера-Пуассона)**.**

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Доказательство. Этот интеграл сходится. Обозначим его J и сделаем замену $x = ut$, где $u > 0$, а t – новая переменная. Тогда $J = u\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt$. Умножим это равенство на e^{-u^2} и проинтегрируем по u. Получим

$$J^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}u\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt\right)du == \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2(1+t^2)}udu\right)dt =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(-\frac{e^{-u^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}\Big|_0^{+\infty}\right)dt == \int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

4. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

3.6 Приложение определённого интеграла к вычислению геометрических величин

3.6.1 Площадь плоской фигуры

Пусть криволинейная трапеция задана так:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x). \end{cases}$$

где $f(x)$ непрерывная функция. Тогда площадь S этой криволинейной трапеции равна

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Пусть теперь криволинейная трапеция задана так

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ -f(x) \le y \le 0 \end{cases}$$

Тогда площадь S этой криволинейной трапеции равна

$$S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Рассмотрим теперь криволинейную трапецию

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

(функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны). Тогда площадь S этой криволинейной трапеции равна

$$S = \int\limits_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

Вычислим площадь s_n фигуры ограниченной графиками $y = \sqrt[n]{x}$; $y = x^n$

$$s_n = \int\limits_0^1 \sqrt[n]{x} - x^n\,dx = \frac{n-1}{n+1} \to 1 \text{ при } n \to +\infty.$$

Пусть функция задана параметрически $x = x(t); y = y(t)$; $\alpha \leq t \leq \beta$, при чем функция $x(t)$ биективна, а $y(t) \geq 0$. Предполагаем также, что x, y, x', y' непрерывны в указанном отрезке. Тогда площадь под графиком равна

$$S = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt \tag{3.19}$$

Если же $y(t)$ биективна, то

$$S = \int\limits_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,dt$$

Пример 3.6.1. Вычислим площадь под первой аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Применим формулу (3.19)

$$S = \int\limits_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)\,dt = 3\pi a^2.$$

3.6.2 Вычисление глобальных величин с помощью формулы Ньютона-Лейбница

Перепишем формулу Ньютона-Лейбница следующим образом

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b dF(x)$$

Глобальная величина, подлежащая вычислению – $F(b)$. Из этой формулы следует: если мы знаем начальное значение $F(a)$ глобальной величины, и дифференциал функции $F(x)$ (а это есть локальная величина, подсчет которой учитывает только линейные слагаемые относительно Δ, то мы можем вычислить $F(b)$ как $F(a) + \int_a^b dF(x)$.

3.6.3 Площадь криволинейного сектора

Пусть P – точка на декартовой плоскости Oxy. Обозначим через $r = r(P)$ расстояние от P до начала координат и назовём это число *полярным радиусом.* Через $\varphi = \varphi(P)$ обозначим угол на который надо повернуть ось Ox до совмещения с направлением вектора $\overrightarrow{OP}$; эту величину назовём *полярным углом.* Полярный угол не определен для начала координат. Пара (r, φ) называется *полярными координатами точки* P. Ясно, что

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arcsin\frac{y}{r}, & \text{если } x \geq 0 \text{ и } r \neq 0 \\ \varphi = \pi - \arcsin\frac{y}{r}, & \text{если } x < 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

Обозначим через K *криволинейный сектор* – фигуру на плоскости, заданную системой неравенств

$$\begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ 0 \leq r \leq f(\varphi) \end{cases} \tag{3.21}$$

($f(\varphi)$ – непрерывная функция.) Найдём площадь $S(K)$ этого сектора. Для этого обозначим через $S(\tau)$ площадь сектора заданного также как и в (3.21), но с $\beta = \tau$. Тогда

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\tau = \frac{1}{2}f^2(\tau)d\tau$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi$$

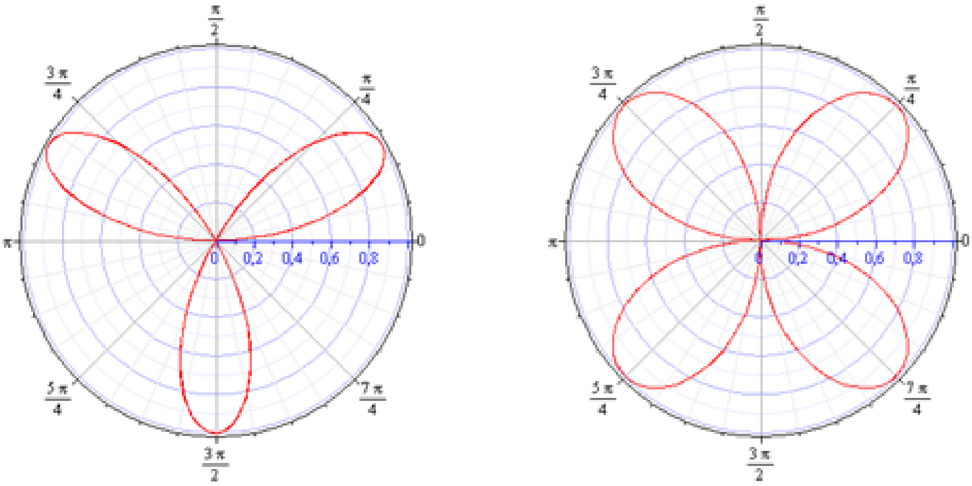


Рис. 3.3: Кривые $r = \sin n\varphi$ для $n = 3, 2$ с учётом отрицательных значений r

3.6.4 Объём тела

Пусть в пространстве задано тело V и ось Ox; причём тело расположено в полосе $a \le x \le b$. Предположим, что известна площадь сечения тела плоскостью π_x перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку x. Обозначим эту площадь $S(x)$. Обозначим через $V(x)$ объем левой части тела V, отсекаемого плоскостью π_x. Тогда ΔV – объем слоя от x до $x + \Delta x$. Отсюда $dV = S(x)dx$. Значит

$$V = V(b) - V(a) = V(b) = \int\limits_a^b dV = \int\limits_a^b S(x)\,dx$$

Следствие (принцип Кавальери) *Если два тела имеют одинаковые площади сечения на одинаковой высоте, то объёмы этих тел совпадают.*

В частности, если V – *тело вращения*, т.е. получено вращением криволинейной трапеции F: $a \le x \le b$; $0 \le y \le f(x)$, то сечение $V \cap \pi_x$ – круг радиуса $f(x)$. Следовательно, $S(x) = \pi f(x)^2$ в этом случае и **объём тела вращения**

$$V = \pi \int\limits_a^b f(x)^2\,dx$$

Определенную выше криволинейную трапецию F можно вращать и относительно оси Oy. При этом надо наложить дополнительное условие $0 \le a$. Обозначим через $V(x)$ объём вращения вокруг оси Oy части этой трапеции

$$\begin{cases} a \le t \le x \\ 0 \le y \le f(t) \end{cases}$$

Тогда dV можно представлять как площадь кольца с внутренним радиусом x, толщиной dx и высотой равной $f(x)$. Тем самым

$$dV = 2\pi x \cdot dx \cdot f(x)$$

Отсюда получаем, что **объём тела вращения вокруг оси Oy** равен

$$V = 2\pi \int\limits_a^b x f(x)\, dx$$

Пример 3.6.2. А. Объём шара радиус R. Шар представляем как тело вращения полукруга $-R \le x \le R$; $0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси Ox. Тогда

$$V_{\text{шара}} = \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int\limits_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi (R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3}) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Б. Объём "обобщенного конуса"с площадью основания S и высоты H Пусть вершина конуса имеет координату 0, а основание имеет координату H. Обозначим площадь сечения плоскостью π_x через $S(x)$. Тогда

$$\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{H^2} \Rightarrow S(x) = \frac{S}{H^2} x^2$$

Отсюда

$$V_{\text{конус}} = \int\limits_0^H \frac{S}{H^2} x^2\, dx = \frac{S}{H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{SH}{3}$$

В. Объём обобщённого цилиндра с площадью основания S и высоты H. В обозначениях предыдущего примера имеем $S(x) = S$. Отсюда

$$V_{\text{цилиндр}} = \int\limits_0^H S\, dx = SH$$

3.7 Длина дуги

Определение 3.7.1. Кривой γ в пространстве называется отображение

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \alpha \le t \le \beta \tag{3.22}$$

Переменная t называется параметром. Точка $P(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ называется *началом* кривой γ, а точка $Q(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ называется *концом*. Если $P = Q$, то кривая γ называется *замкнутой*. Кривая γ называется *непрерывной*, если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны. Кривая называется *гладкой*, если существуют непрерывные производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, причём они не равны 0 одновременно. Кривая γ называется *кусочно-гладкой*, если она непрерывна и её можно разбить на конечное число гладких кусков.

Примеры. 1. Отрезок прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + tp \\ y = y_0 + tq \\ z = z_0 + tr \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta \quad (p^2 + q^2 + r^2 \ne 0)$$

2. Окружность

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$$

Считая а) $0 \le t \le 2\pi$, б) $0 \le t \le 4\pi$, в) $0 \le t \le \pi$ получим разные кривые.

3. *Винтовая линия* радиуса R и с шагом H

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = \frac{H}{2\pi} t \end{cases}$$

4. *Цепная линия* – график функции $y = \operatorname{ch} x$.

5. Периметр квадрата – пример кусочно гладкой кривой

Пусть γ_1, γ_2 такие кривые, что конец первой совпадает с началом второй. Тогда можно построить кривую $\gamma_1 + \gamma_2$, отрезок изменения параметра которой, - $[\alpha, \beta]$,- можно разбить на два подотрезка $[\alpha, \delta]$, $[\delta, \beta]$, на первом из которых кривая $\gamma_1 + \gamma_2$ эквивалентна γ_1, а на втором – γ_2.

В примере с квадратом $ABCD$ его периметр можно рассматривать как сумму отрезков $AB + BC + CD + DA$ в указанном выше смысле. Более общо, пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – точки пространства. Тогда кривую $\gamma = P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n$ назовём *ломаной*, а число

$$l(\gamma) = |P_1P_2| + |P_2P_3| + \dots + |P_{n-1}P_n|$$

назовём *длиной этой ломаной.*

Определение 3.7.2. Пусть (3.22) – произвольная кривая, и $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ - разбиение. Обозначим $P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$. Тогда ломаную

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n$$

назовём *вписанной* в γ. *Длиной кривой* γ называется предел длин вписанных ломаных, если максимум длин звеньев стремиться к 0.

Теорема 3.7.3. *Пусть γ – кусочно-гладкая кривая. Тогда*

$$l(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Доказательство. Обозначим через $l(\tau)$ – длину кривой (3.22) с отрезком изменения параметра от α до τ. Тогда

$$dl(\tau) = |\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{r}(\tau + d\tau)| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt$$

??? Отсюда следует результат. □

Следствие 3.7.4. *Если $y = f(x)$ – дифференцируемая функция с кусочно непрерывной производной на отрезке $[a, b]$, то длина дуги графика этой функции на данном отрезке будет равна*

$$l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f')^2}\, dx.$$

Пример 3.7.5. 1. Длина отрезка

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\, dt = (\beta - \alpha)\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = |PQ|$$

Здесь P и Q – начальная и конечная точка отрезка.

2. Длина окружности, двойной окружности и полуокружности

$$l_1 = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt = 2\pi R$$

$$l_2 = \int\limits_0^{4\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt = 4\pi R,\ \ l_3 = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt = \pi R$$

3. Длина одного витка винтовой линии

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\, dt = 2\pi R \sqrt{1 + \left(\frac{H}{2\pi R}\right)^2}$$

4. Длина цепной линии

$$\int\limits_a^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int\limits_a^b \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x|_a^b = \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a.$$

Предложение 3.7.6. *Имеет место равенство* $l(\gamma_1 + \gamma_2) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ *в общем случае.* □

3.8 Приложение определённого интеграла к вычислению физических величин

3.8.1 Длина пути

Тело движется по прямой Ox с известной скоростью $v(t)$. Известно положение тела в начальный момент времени: $x_0 = x(t_0)$. Где будет находится тело в момент t_1? Ответ:

$$x(t_1) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt \tag{3.23}$$

Это следствие формулы Ньютона-Лейбница и того факта, что $v(t) = x'(t)$. Аналогично, если известна зависимость ускорения от времени – $w(t)$, то

$$v(t_1) = v(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1} w(t)\, dt \tag{3.24}$$

Равноускоренное движение. Пусть ускорение постоянно и равно a, а тело в начальный момент времени $t_0 = 0$ находилось в начале координат $x_0 = 0$ и имело нулевую скорость $v_0 = v(0) = 0$. Тогда

$$v(t) = 0 + \int_0^t a\, dt = at, \quad x(t) = 0 + \int_0^t \tau a\, d\tau = \frac{at^2}{2}.$$

3.8.2 Работа силы

Пусть тело движется по оси Ox и в каждой точке x известна проекция силы, действующей на это тело, на ось – $F(x)$. Тогда работа силы при перемещении из точки a в точку b равна

$$A = \int\limits_a^b F(x)\,dx \tag{3.25}$$

Пример 3.8.1. Сила действующая на пружину растянутую на x относительно положения равновесия равна $F(x) = -kx$. Вычислим работу этой силы:

$$A = \int_0^a (-kx)dx = -\frac{ka^2}{2}$$

3.8.3 Статистические моменты и центр тяжести

Пусть на плоскости Oxy задана система материальных точек $M_j(x_j; y_j)$ с массами m_j $(1 \leq j \leq n)$. Статистическим моментом относительно оси Ox (оси Оу) называется величина

$$S_x = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j; \quad S_y = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j.$$

Если масса распределена непрерывно вдоль графика функции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ с одинаковой линейной плотностью c, то малый «кусочек» этой кривой длины dl имеет статистические моменты относительно координатных осей $dS_x = cydl$; $dS_y = cxdl$. Отсюда вытекает, что

$$S_x = c\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx; \quad S_y = c\int\limits_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Определение 3.8.2. Пусть в пространстве задана система точечных масс $(m_i, \mathbf{r}_i)$ $(1 \leq i \leq n)$. Тогда *центр тяжести* данной системы – это точка

$$\mathbf{r}_{\text{ц.т.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{M}, \tag{3.26}$$

где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса всей системы.

Пример 3.8.3. Найдем ц.т. однороднойу нити, имеющий вид первой четверти окружности радиуса R. Ввиду симметрии $x_{\text{ц.т.}} = y_{\text{ц.т.}}$. Получаем

$$S_x = c\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{(1+[-x/\sqrt{R^2-x^2}]^2)}dx = 2\pi\pi\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2+x^2}\,dx = cR^2$$

откуда $x_{\text{ц.т.}} = y_{\text{ц.т.}} = \frac{2}{c\pi R}cR^2 = \frac{2R}{\pi}$.

Пусть теперь задана однородная плоская пластинка

$$D: \begin{cases} a \le x \le b \\ g(x) \le y \le f(x) \end{cases}$$

Найдём центр тяжести этой пластинки. Для этого разобьём пластинку D на полоски прямыми $x = a$, $x = x_1$,..., $x = x_n = b$. Каждую полоску аппроксимируем прямоугольником $[x_{i-1}, x_i] \times [g(\xi_i), f(\xi_i)]$, где $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Её центр тяжести находится в точке $\mathbf{r}_i = (\xi_i, (f(\xi_i) + g(\xi_i))/2)$, а масса равна $\Delta M_i = \delta(f(\xi_i) - g(\xi_i))\Delta x_i$. Заменим всю пластинку на систему точечных масс $(\Delta M_i, \mathbf{r}_i)$. Тогда приближённо центр тяжести пластинки равен

$$\begin{cases} x_{\text{ц.т.}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \delta\xi_i(f(\xi_i) - g(\xi_i))\Delta x_i \\ y_{.} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \frac{f(\xi_i)+g(\xi_i)}{2}\delta\xi_i(f(\xi_i) - g(\xi_i))\Delta x_i \end{cases},$$

где $M = \delta S$ – масса пластинки, δ – поверхностная плотность, а S – площадь пластинки. Переходя к пределу $\lambda \to 0$ и сокращая на δ, получим окончательную формулу

$$\begin{cases} x_{\text{ц.т.}} = & \frac{1}{S}\int\limits_a^b x(f(x) - g(x))dx \\ y_{\text{ц.т.}} = & \frac{1}{S}\int\limits_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx \end{cases},$$

где $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

Пример 3.8.4. Ц.т. однородного полукруга расположен в точке $\frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}$.

3.8.4 Момент инерции

Определение 3.8.5. Пусть $(m_1, \mathbf{r}_1)$, $(m_2, \mathbf{r}_2)$,...,$(m_k, \mathbf{r}_k)$ – система точечных масс. *Моментом инерции* этой системы *относительно точки P (прямой ℓ, плоскости π)* называется число

$$I = \sum_{i=1}^k m_i d_i^2,$$

где d_i – расстояние от i-ой точки до точки P (прямой ℓ, плоскости π).

Пример 3.8.6. А. Момент инерции однородного цилиндра относительно своей оси.

Обозначим R – радиус цилиндра, H – высоту цилиндра, c – плотность. Обозначим также через $I(x)$, $(0 \le x \le R)$ момент инерции такого же цилиндра, но радиуса x. Тогда

$$dI = c \cdot dM \cdot x^2 = c(2\pi x \cdot dx \cdot H)x^2 = 2\pi cHx^3 dx$$

Отсюда
$$I = \int\limits_0^R 2\pi c H x^3 dx = 2\pi c H \frac{R^4}{4} = \frac{c\pi R^2 H}{2} = \frac{MR^2}{2}$$
Здесь M – масса цилиндра.

Б. Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через центр. Пусть R – радиус шара. Ось Ox проходит через центр шара. Пусть $I(x)$ $(0 \leq x \leq R)$ – момент инерции части шара, состоящей из точек, удаленных от начала координат на расстояние $\leq x$ относительно начала координат. Тогда
$$dI = dM \cdot x^2 = 4\pi c x^2 \cdot dx \cdot x^2 = 4\pi c x^4 dx$$
Отсюда
$$I = \int\limits_0^R 4\pi c x^4 \, dx = \frac{4}{5}\pi c R^5 = \frac{4}{3}\pi R^3 c \frac{3R^2}{5} = \frac{3}{5} M R^2$$
где M – масса шара.

Заметим, что
$$I_{\text{нач.коор.}} = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$$
(I_x, I_y I_z – моменты инерции относительно координатных осей). В нашем случае $I_x = I_y = I_z$. Отсюда $I_x = \frac{2}{3}I = \frac{2}{3}I = \frac{2}{5}MR^2$.

3.8.5 Масса тяжелой нити

Пусть $\gamma : (x(t), y(t), z(t)),\ \alpha \leq t \leq \beta$ – кусочно гладкая кривая, описывающая форму нити с линейной плотностью $c(t)$. Тогда масса нити вычисляется по формуле
$$M = \int\limits_\alpha^\beta c(t)\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt \qquad (3.27)$$

Глава 4

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДИФФ. УРАВНЕНИЙ

4.1 Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Ранее неоднократно мы встречались с уравнениями с одним неизвестным; при этом корнем или решением такого уравнения служило число, при подстановке кqоторого вместо неизвестного уравнение превращалось в верное числовое равенство. В этом разделе мы будем решать уравнения, неизвестным в которых является функция. В разделе «Неопределенный интеграл» мы фактически занимались решением дифференциального уравнения

$$y' = f(x) \tag{4.1}$$

Требовалось найти такую функцию (первообразную) $F(x)$, производная которой тождественно равна $f(x)$. Мы видели, что решений у уравнения (4.1) бесконечно много, и все они отличаются друг от друга на константу (теорема 2.1.2 о первообразных). Эту множественность решений можно обозревать и с другой точки зрения. Фиксируем значение первообразной в определенной точке:

$$F(x_{\text{нач}}) = y_{\text{нач}}. \tag{4.2}$$

Считаем $x_{\text{нач}}$, $y_{\text{нач}}$ начальными условиями. Тогда для непрерывной функции $f(x)$, заданной на интервале (a, b) и начальных условий $x_{\text{нач}}$, $y_{\text{нач}}$ таких, что $x_{\text{нач}} \in (a, b)$ существует и единственно решение $y = F(x)$ уравнения (4.1), удовлетворяющее соотношению (4.2). Более того, ответ задается формулой

$$F(x) = y_{\text{нач}} + \int\limits_{x_{\text{нач}}}^{x} f(t)\, dt \tag{4.3}$$

(теорема 3.2.1). Выше сформулирована теорема существования и единственности для дифференциального уравнения самого простого вида. Рассмотрим теперь уравнение вида

$$y' = f(x, y) \tag{4.4}$$

Его полное название – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка в нормальной форме. Обыкновенное, так как неизвестная функция $y(x)$ зависит лишь от одной переменной, в отличии, например, от уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Первого порядка – так как старшая производная, входящая в уравнение (4.4) имеет первый порядок. Нормальная форма записи дифференциального уравнения означает, что старшая производная выражена через младшие производные, саму неизвестную функцию, а также переменную. Таким образом,

$$y'' = f(x, y, y') \tag{4.5}$$

– дифференциальное уравнение второго порядка в нормальной форме, а

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{4.6}$$

есть общий вид дифференциального уравнения n-го порядка в нормальной форме.

Самый общий вид дифференциального уравнения порядка n с неизвестной функцией $y(x)$ таков:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{4.7}$$

Решением (частным) дифференциального уравнения (4.7) называется n раз дифференцируемая функция $y(x)$ такая, что при подстановке в (4.7) получается тождество по x.

Задача об отыскании частного решения $y(x)$ уравнения (4.3), удовлетворяющего начальному условию $y(x_{\text{нач}}) = y_{\text{нач}}$ называется *задачей Коши*. Далее начальные условия (кратко: н.у.) будем обозначать x_0, y_0.

Пример 4.1.1. Функция $y = e^{2x}$ – решение диф. уравнения $y' = 2y$ так как $(e^2x)' = 2e^2x$ есть тождество. Более общо: любая функция вида Ce^{2x} есть решение данного диф. уравнения. Докажем, что других решений нет. Пусть $\varphi(x)$ – решение. Запишем его в виде $\varphi(x) = c(x)e^{2x}$. Тогда $c'(x)e^{2x} + c(x)2e^{2x} = 2c(x)e^{2x}$, откуда $c'(x)e^{2x} = 0$, следовательно, $c'(x) = 0$. По теореме 2.1.2 о первообразных $c(x) = C$ – константа.

Имея дело с дифференциальным уравнением, приходится отвечать на следующие фундаментальные вопросы

- Имеет ли данное дифференциальное уравнение хотя бы одно решение?
- Единственно ли решение дифференциального уравнения при заданных дополнительных условиях (например, таких, как в задаче Коши)?
- Как обозреть множество всех решений данного дифференциального уравнения?

- Как найти приближенное решение дифференциального уравнения с заданной точностью? Такой вопрос возникает, например, когда мы не имеем возможности решить «в квадратурах» дифференциальное уравнение, т.е. выразить решение в виде замкнутой формулы с использованием операции интегрирования.
- Можно ли, не решая дифференциального уравнения ни точно, ни приближенно, тем не менее, определить свойства решения?

Сформулируем без доказательства ответ на первый и второй вопросы

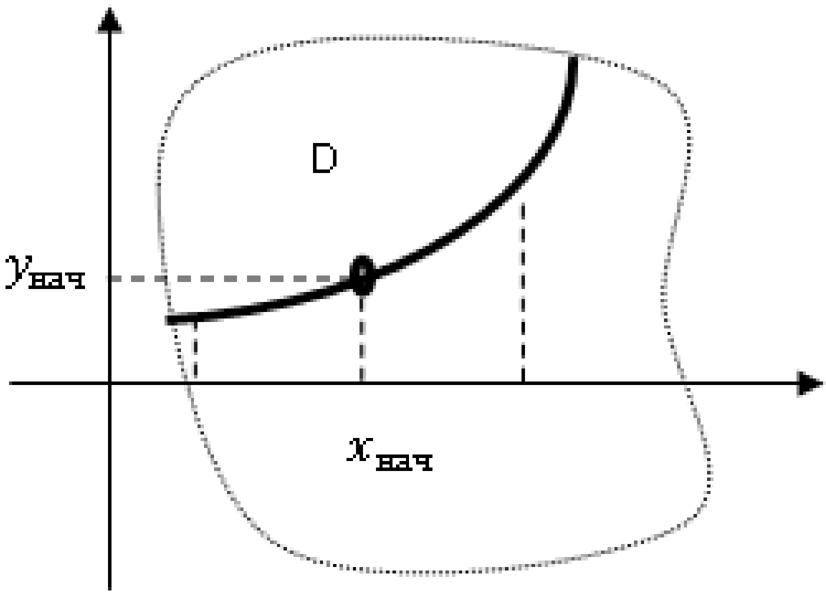


Рис. 4.1: Интегральная кривая – решение задачи Коши

Теорема 4.1.2 (существования и единственности). *Если функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, содержащей (x_0,y_0) как внутреннюю точку, то существует прямоугольник $P : (a,b)\times(c;d)$, содержащий точку $(x_0;y_0)$ и функция $y=\varphi(x)$ такие, что*

1) $P\subseteq D$;

2) ОДЗ$\varphi=(a;b)$ и $\varphi(x)\in(c;d)$ для любого $x\in(a;b)$ (тем самым график функции $\varphi(x)$ лежит в прямоугольнике P);

3) функция $\varphi(x)$ дифференцируема и является решением задачи Коши с н.у. $x_0;y_0$

Кроме того, любое решение данной задачи Коши совпадает с $\varphi(x)$ на пересечении их ОДЗ.

Пример 4.1.3. Дифференциальное уравнение $y' = y^{2/3}$ имеет два решения $y_1 \equiv 0$ и $y_2 = \frac{1}{27}x^3$ удовлетворяющие начальным условиям $(0,0)$. Это в силу того, что $f'_y = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ разрывна в точке $(0;0)$.

График решения дифференциального уравнения (4.4) называется *интегральной кривой.* Теорема существования и единственности может быть переформулирована так: *через каждую точку области D проходит одна единственная интегральная кривая*

Определение 4.1.4. *Общим решением* дифференциального уравнения (4.4) в области D называется такая функция $y = \varphi(x, C)$, что для любых начальных условий $(x_0, y_0) \in D$ найдется константа C_0 такая, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$, причём $\varphi(x) := \Phi(x, C_0)$ – решение задачи Коши, о котором говорится в пп. 1)-3) теоремы 4.1.2.

Например, выше доказано, что $\Phi(x, C) = Ce^x$ – общее решение д.у. $y' = y$ на всей декартовой плоскости (т.е. $D = \mathbb{R}^2$), а $\varphi(x) = e^x$ – частное решение, или решение задачи Коши с н.у. $(0; 1)$.

Геометрическая интерпретация д.у. первого порядка Пусть D – область определения функции $f(x, y)$. В каждой точке $(x, y) \in D$ нарисуем кусочек прямой, сонаправленной с вектором $\mathbf{i} + \mathbf{j} \cdot f(x, y)$. Получим *поле направлений* на области D. Кривая γ будет интегральной кривой тогда и только тогда, когда в любой своей точке P она касается соответствующего направления.

4.2 Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

4.2.1 Уравнение размножения и гибели.

Биологический закон: при благоприятных условиях скорость размножения бактерий (или других микроорганизмов) пропорциональна их количеству (объему популяции) $N(t)$. На языке математики это запишется так:

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t), \quad (k > 0) \tag{4.8}$$

Уравнение (4.8) будет дифференциальным, так как представляет собой зависимость между неизвестной функцией и её производной. Легко догадаться, что при любом значении постоянной C, функция $N(t) = Ce^{kt}$ будет решением этого уравнения. Других решений нет, что доказывается так же как и в примере 4.1.1.

Предположим, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ (минут) имелось $N_0 = 100$(шт.) бактерий. Наблюдая за бактериями, мы обнаружили, что через минуту их стало 200 шт. Сколько будет бактерий через 10 мин.?

$$\begin{cases} Ce^{k \cdot 0} = 100 \\ Ce^{k \cdot 1} = 200 \end{cases} \Rightarrow C = 100 \text{ и } e^k = 2$$

откуда следует, что $N(10) = 100e^{10k} = 100 \cdot 2^{10} = 102400$шт.

Сформулируем ещё три закона, приводящие к дифференциальному уравнению такого же типа:

а) Пусть $M(t)$ – масса радиоактивного вещества в момент времени t. Известно, что скорость его убывания пропорциональна наличному количеству. Получаем диф. уравнение: $\frac{dM}{dt} = -kM(t)$, где $k > 0$.

б) Пусть $P(h)$ – давление воздуха на высоте h. Считая ускорение свободного падения g не зависящим от высоты, можно вывести, что $\frac{dP}{dh} = -gP(h)$.

в) Скорость изменения температуры тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Считая, что температура окружающей среды постоянна и равна T_1, а температура тела в момент t равна $T(t)$, получаем дифф. уравнение

$$\frac{dT}{dt} = -\gamma(T - T_1) \tag{4.9}$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент пропорциональности.

Заменяя $z(t) = T(t) - T_1$ сводим последнее дифференциальное уравнение к виду $z' = -\gamma z$ решение которого мы уже знаем: $z(t) = z(0)e^{(} - \gamma t)$. Отсюда получаем зависимость температуры от времени

$$T(t) = T_1 + (T(0) - T_1)e^{(} - \gamma t) \tag{4.10}$$

Графики функций (4.10) при различных значениях $T(0)$ называются интегральными кривыми. Вид их указан на рис. 4.2

Пример 4.2.1. Браконьер убил кабана. Обходчик, обнаруживший труп кабана, измерил его температуру – она оказалась 31^oC. Через час обходчик снова измерил температуру. Она оказалась 29^o. Предполагая, что температура воздуха не изменялась и была равной 21^o, найти за сколько времени до момента первого измерения температуры было совершено преступление. Температуру живого кабана принять равной 37^o.

Решение. Считаем, что скорость охлаждения тела в среде пропорциональна разности между температурой тела и температурой среды. Обозначая через $x(t)$ - температуру кабана в момент времени t, получаем дифференциальное уравнение $dx/dt = -k(x-a)$ (*), где a - температура воздуха. Время измеряется в часах и краевые условия таковы: $x(0) = 31$; $x(1) = 29$. Как мы знаем, общее решение уравнения (*) имеет вид: $\ln(x-a) = -kt + C$. Подставляя значения $t = 0$, $t = 1$ получаем систему для определения C и k:

$$\ln(31 - 21) = C;\ \ln(29 - 21) = -k + C, \Rightarrow k = \ln 10 - \ln 8 = \ln 1,25 \approx 0,22314$$

Отсюда $t = -1/k \ln \frac{x-21}{31-21}$. Подставляя сюда $x = 37$, находим время $t \approx -2,10630$.

Ответ: Преступление совершено за 2 часа 6 мин до момента первого обхода.

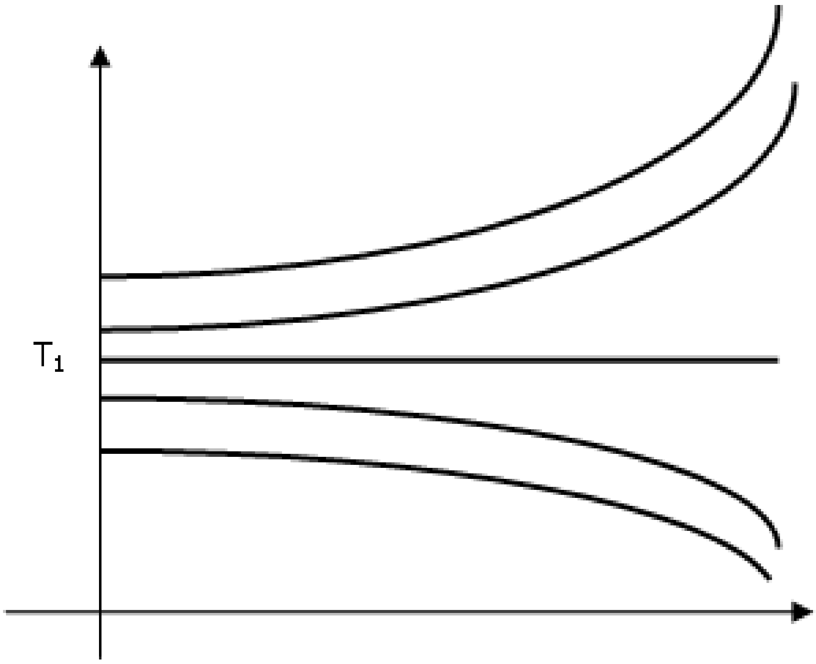


Рис. 4.2: Семейство интегральных кривых

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \cdot y \tag{4.11}$$

называется *уравнением размножения и гибели.* Мы доказали, что *все решения уравнения (4.11) исчерпываются функциями вида* $y = Ce^{\lambda x}$.

4.2.2 Уравнение движения точки на оси

Пусть материальная точка массой m движется вдоль оси Ox, занимая в момент времени t, положение $x(t)$, имея мгновенную скорость $v(t)$ и ускорение $w(t)$. Согласно второму закону Ньютона произведение mw равно сумме действующих сил на точку. Этот закон в общем виде представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{4.12}$$

Считаем, что нам известны положение x_0 и скорость v_0 в начальный момент времени $t_0 = 0$. Рассмотрим частные случаи.

А. *Свободное движение.* Это тот случай, когда $F \equiv 0$. Тогда $x(t) = v_0 t + x_0$ – равномерное движение.

Б. *Равноускоренное движение.* В этом случае $F = a$ – константа. Тогда $x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0$.

В. *Уравнение колебаний.* Пусть на точку действует только сила упругости пружины, которая по закону Гука равна $F(x)) = -kx$, где $k > 0$ – коэффициент жесткости пружины. Получаем *уравнение свободных колебаний*

$$\frac{d^x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right) \tag{4.13}$$

Можно проверить, что $C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi)$ есть целое семейство решений этого уравнения. Более того, если задано положение точки x_0 и скорость $v_0 = x'(t_0)$ в начальный момент времени t_0, то положение ее в любой момент времени строго определено. Это значит, что найдутся единственные константы C_1^0, C_2^0 такие, что

$$C_1^0 \cos \omega t_0 + C_2 \sin \omega t_0 = x_0; \quad -C_1 \omega \sin \omega t_0 + C_2 \omega \cos \omega t_0 = v_0 \tag{4.14}$$

Действительно, определитель системы линейных уравнений (4.14) есть

$$\begin{vmatrix} \cos \omega t_0 & \sin \omega t_0 \\ -\sin \omega t_0 & \cos \omega t_0 \end{vmatrix} = 1$$

и не равен нулю. Следовательно, по правилу Крамара система (4.14) имеет единственное решение.

Если на материальную точку кроме упругой силы действует и сила сопротивления вязкой среды $F_c = -\lambda v$ ($\lambda > 0$ – коэффициент вязкости), то получаем *уравнение колебаний с учетом сопротивления*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} + \omega^2 x = 0 \tag{4.15}$$

Если на материальную точку кроме силы упругости и силы сопротивления действует еще и вынуждающая сила $F(t)$, зависящая от времени, то получаем уравнение вынужденных колебаний :

$$mx'' + \lambda x' + kx = F(t)$$

4.2.3 Форма прожектора

Какой формы надо сделать прожектор, чтобы лучи света, отразившись от него, шли параллельным пучком? Поверхность прожектора будем представлять как поверхность вращения графика функции $y = y(x)$ вокруг оси Oy – оси, параллельной выходящему пучку света. Источник света поместим в начало координат. Рассмотрим точку $P(x, y(x))$ на графике функции. Вектор, направленный по касательной, имеет вид $\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$. Тогда условие задачи может быть записано как соотношение

$$\frac{\overrightarrow{OP}\cdot(\mathbf{i}+y'\mathbf{j})}{|\overrightarrow{OP}|\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{\mathbf{j}\cdot(\mathbf{i}+y'\mathbf{j})}{|\mathbf{j}|\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Так как $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, то получаем $\frac{x+y'y}{\sqrt{x^2+y^2}} = y'$, откуда

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}-y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x} = \sqrt{1+(y/x)^2}+y/x \tag{4.16}$$

4.2.4 Задачи, приводящие к системе дифференциальных уравнений

(Берман [1], стр 277, задача 4345) Скорость роста культуры микроорганизмов пропорциональна их количеству $N(t)$ и количеству питательных веществ $M(t)$ (коэффициент пропорциональности равен k). Скорость убывания питательных веществ пропорциональна наличному количеству микроорганизмов с коэффициентом пропорциональности l. Найти зависимости N и M от времени.

Условие задачи непосредственно переформулируются на языке дифф. уравнений и приводят к системе двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = & k\cdot N(t)M(t) \\ \frac{dM(t)}{dt} = & -l\cdot N(t) \end{cases} \tag{4.17}$$

4.3 Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка

Дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x,y). \tag{4.18}$$

Пусть D - область определения функции $f(x,y)$. В каждой точке (x,y) области D нарисуем отрезок с коэффициентом наклона равным $f(x,y)$. Получим *поле направлений* на области D. Кривая γ будет интегральной кривой, т.е. графиком решения уравнения (4.18) тогда и только тогда, когда в любой точке $P\in\gamma$ она касается соответствующего направления. Тем самым поле направлений помогает качественно оценить вид решений, не решая дифференциального уравнения.

Для того, что бы можно было представить как качественно ведут себя интегральные кривые, рисуют сначала изоклины. *Изоклиной* д.у. (4.4) называется линия в области D в которой $y' = Const$. Иными словами, изоклины – линии уровня функции $f(x,y)$.

Пример 4.3.1. Рассмотрим уравнение $y' = y^2 + x^2$ (не решаемое в квадратурах). Нарисуем поле направлений.

Видно, что все решения – возрастающие функции. Только одно решение с начальными условиями $y(0) = 0$ имеет критическую точку $O(0;0)$ (точка перегиба, так как вторая производная $y'' = (y^2+x^2)' = 2yy' + 2x = 2y(y^2+x^2) + 2x = 2y^3 + 2yx^2 + 2x \approx 2x$ в начале координат меняет знак).

4.4 Приближенное решение дифференциальных уравнений

Дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{4.19}$$

а также начальные условия x_0, y_0, число $b \in \mathbb{R}$, $b \geq x_0$ и точность $\varepsilon > 0$. Требуется найти приближённое решение $\varphi^*(x)$ уравнения (4.19) на отрезке $[x_0, b]$ с точностью ε, удовлетворяющее начальному условию $\varphi^*(x_0) = y_0$. Это значит, что должно быть выполнено неравенство

$$\max_{x \in [x_0, b]} |\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leq \varepsilon$$

где $\varphi(x)$ – решение задачи Коши уравнения (4.19) с н.у. x_0, y_0.

4.4.1 Метод Эйлера

Разделим отрезок $[x_0, b]$ на n равных частей

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_i - x_{i-1} = h,\ h = \frac{b - x_0}{n}$$

Точки x_i называются *узловыми.* Заменим (4.19) на разностное уравнение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y)$$

или, если обозначить через $y_i = \varphi^*(x_i)$ значения в узловых точках, то

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad (0 \le i \le n-1)$$

Это система линейных уравнений относительно y_i, которая легко решается рекуррентно:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, ..., n-1 \tag{4.20}$$

Ломаная, соединяющая точки (x_0, y_0), (x_1, y_1),...,(x_n, y_n), называется *ломаной Эйлера.* Обозначим через $\varphi_h(x)$ кусочно-линейную функцию, имеющую ломаную Эйлера своим графиком.

Теорема 4.4.1. *Пусть функции f и f'_y непрерывны в прямоугольнике $P = [x_0, b] \times [y_0 - d, y_0 + d]$ для некоторого $d > 0$ и числа $M, K \in \mathbb{R}$ таковы, что*

$$\max_P |f(x,y)| \le M, \quad \max_P |f'_y(x,y)| \le K, \quad M(b - x_0) \le d.$$

Существует константа $D = D(M, K, b)$ такая, что

$$|\varphi(x) - \varphi_h(x)| \le Dh^2$$

для любого $x \in [x_0, b]$. В частности, если $h \to 0$, то $\varphi_h(x) \to \varphi(x)$ равномерно.

4.5 Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{4.21}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*

Метод решения уравнения (4.21).

а) разделяем переменные

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

б) интегрируем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$$

(константу C записываем лишь одну)

в) выражаем y через x и C; – получаем общее решение.

Например, решим таким методом уравнение размножения и гибели $y' = ky$. Разделяя переменные, получим $\frac{dy}{y} = kx$. Интегрируем: $\ln|y| = \ln|kx| + C$. Далее $y = (\pm e^C)e^{kx}$. Переобозначая C вместо $\pm e^C$, получаем окончательно $y = Ce^{kx}$ – общее решение уравнения размножения и гибели на всей плоскости.

Уравнение взрывной реакции:

$$x'(t) = kx^2$$

Здесь $x(t)$ – количество вещества в момент времени t. $k > 0$ – коэффициент пропорциональности. Методом, изложенном выше, находим общее решение

$$x(t) = \frac{1}{C - kt}$$

Если $x(0) = x_0 > 0$, то количество вещества становиться бесконечным за конечное время $1/x_0$.

4.6 Однородные уравнения

Так называются уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4.22}$$

Метод решения:

а) переходим к новой неизвестной функции $u = \frac{y}{x}$.

Тогда $y = ux$, $y' = u + u'x$ и (4.22) переписывается так

$$u'x + u = f(u) \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = f(u) - u$$

а это уравнение с разделяющимися переменными.

б) Решаем это уравнение: пусть $u = \varphi(x, C)$ - общее решение.

в) Тогда $y = x\varphi(x, C)$ – общее решение исходного уравнения (4.22).

Найдем форму прожектора. Согласно (4.16) нам остаётся решить дифференциальное уравнение

$$y' = \sqrt{1 + (y/x)^2} + y/x$$

Заменяя $u = y/x$, получим $u'x + u = \sqrt{1 + u^2} + u$, откуда $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, получаем $u + \sqrt{1 + u^2} = Cx$. Перенося u в право и возводя в квадрат, имеем:

$$1 + u^2 = C^2x^2 - 2Cxu + u^2 \Rightarrow u = \frac{C^2x^2 - 1}{2Cx}$$

Отсюда, окончательно, $y = \frac{1}{2C}(C^2x^2 - 1)$ – семейство парабол с фокусом в начале координат.

4.7 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Так называются уравнения вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{4.23}$$

Если функции $P(x)$, $Q(x)$ непрерывны, то условия теоремы существования и единственности выполнены.

Метод решения

а) Решаем сначала уравнение $y' + P(x)y = 0$ без правой части как уравнение с разделяющимися переменными. Получаем общее решение в виде $y(x) = C \cdot u(x)$.

б) Общее решение уравнения (4.23) ищем в виде $y = C(x)u(x)$, где $C(x)$ – функция, подлежащая определению. Такой приём называется **методом вариации постоянных.**

в) Подставляя $C(x)u(x)$ в (4.23), имеем:

$$C'(x)u(x) + C(x)u'(x) + P(x)C(x)u(x) = Q(x)$$

Так как $C(x)u'(x) + P(x)C(x)u(x) = C(x)(u' + Pu) = 0$, ибо $u' + Pu = 0$, то

$$C'(x) = \frac{Q(x)}{u(x)}$$

г) Решая это уравнение, т.е. интегрируя, находим

$$C(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)}dx \tag{4.24}$$

д) Подставляя (4.24) в $y = C(x)u(x)$, получаем общее решение исходного уравнения.

Пример. Сила тока $j(t)$ в электрической цепи с омическим сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции L удовлетворяет д. уравнению

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E,$$

где E – электродвижущая сила. Найдём зависимость $j(t)$ при условии, что $E = E_0 \sin \omega t$. Полагая сначала $E = 0$, находим $j(t) = Ce^{-\alpha t}$, где $\alpha = R/L$. Тогда решение исходного уравнения ищем в виде $C(t)e^{-\alpha t}$. Функцию $C(t)$ находим из уравнения $C'(t) = \frac{E_0}{L}e^{\alpha t} \sin \omega t$. Чтобы облегчить интегрирование рассмотрим сразу комплексный случай $E = E_0 e^{i\omega t}$. Тогда

$$C(t) = \mathrm{Im}\left(\frac{E_0}{L}\int e^{\alpha t + i\omega t}\right) + C = \frac{E_0}{L}\Im\left(\frac{e^{(\alpha+i\omega)t}}{\alpha + i\omega}\right) + C =$$
$$= \frac{E_0}{L}e^{\alpha t}\frac{-\omega\cos\omega t + \alpha\sin\omega t}{\omega^2+\alpha^2} + C$$

Отсюда
$$j(t) = \frac{E_0}{L}\frac{\alpha\sin\omega t - \omega\cos\omega t}{\omega^2+\alpha^2} + Ce^{-\alpha t}$$

4.7.1 Уравнение Бернулли

Это уравнения вида
$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$
Для $n = 0$ и $n = 1$ это будет линейное уравнение. Для оставшихся n уравнение Бернулли может быть решено двумя способами

а) оно сводится к линейному заменой $z = 1/y^{n-1}$.

б) его решаем методом вариации постоянной, в начале отбрасывая правую часть.

Пример. Пусть имеется популяция $N(t)$ с коэффициентом рождаемости p. На популяцию действует вредный фактор интенсивности пропорциональной $e^{-\alpha t}N$ ($\alpha \geq 0$). Это случай эпидемии с которой борются (при $\alpha > 0$). Тогда дифференциальное уравнение, описывающее скорость изменения популяции будет
$$\frac{dN}{dt} = pN - qe^{-\alpha t}N^2,$$
где $q > 0$ – коэффициент пропорциональности. Будем решать это уравнение сначала в предположении $q = 0$. Тогда $N(t) = Ce^{pt}$. Решение исходного уравнения ищем в виде $N(t) = C(t)e^{pt}$. Заметим, что $N_0 = N(0) = C(0)$ – объём популяции в начальный момент времени. Подставляя $N(t) = C(t)e^{pt}$, получаем уравнение на C':
$$C'(t)e^{pt} = -qe^{-\lambda t}C^2(t)e^{2pt} \Rightarrow \frac{C'(t)}{C^2(t)} = -qe^{(p-\alpha)t}.$$

Заметим, что случай $\alpha = -\infty \Leftrightarrow q = 0$ самый благоприятный для популяции.

Случай $\alpha \neq p$. Тогда $-\frac{1}{C(t)} = -\frac{qe^{(p-\alpha)t}}{p-\alpha} + C$. Подставляя сюда $t = 0$, находим
$$C = \frac{q}{p-\alpha} - \frac{1}{N_0} = \frac{N_0q - p + \alpha}{N_0(p-\alpha)}.$$
Тогда
$$\frac{1}{C(t)} = \frac{qe^{(p-\alpha)t}}{p-\alpha} - \frac{N_0q - p + \alpha}{N_0(p-\alpha)}$$

$$N(t) = N_0 \frac{p-\alpha}{N_0 q e^{(p-\alpha)t} - qN_0 + p - \alpha} e^{pt} = \frac{N_0}{N_0 q \frac{e^{(p-\alpha)t}-1}{p-\alpha} + 1} e^{pt}$$

При $\alpha = 0$ (самый ужасный случай) имеем:

$$N(t) = N_0 \frac{1}{N_0 q \frac{e^{pt}-1}{p} + 1} e^{pt}.$$

Эта величина стремится к p/q при $t \to +\infty$. При $\alpha = p$ находим:

$$N(t) = \frac{N_0}{N_0 q t + 1} e^{pt}$$

4.8 Уравнение в полных дифференциалах

Определение 4.8.1. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{4.25}$$

называется *уравнением в дифференциалах*. Это уравнение назовём *уравнением в полных дифференциалах*, если в рассматриваемой области существует функция $u(x,y)$, называемая *потенциалом*, дифференциал которой равен левой части уравнения (4.25).

Во-первых, заметим, что (4.25) действительно дифференциальное уравнение первого порядка, ибо оно может быть переписано для области D, в которой $N(x,y) \neq 0$ как $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$. Наоборот, любое дифф. уравнение первого порядка может быть записано в дифференциалах.

Во-вторых, уравнение в полных дифференциалах может быть переписано в виде $du(x,y) = 0$ общим решением которого являются *эквипотенциальные кривые*: $u(x,y) = C$. Докажем это. Пусть $y(x)$ неявно задана уравнением $u(x,y) = C$. Тогда $u(x, y(x)) = C$. Вычисляя дифференциал левой и правой части, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \Leftrightarrow Mdx + Ndy = 0$$

С другой стороны, пусть (x_0, y_0) – начальные условия. Тогда возьмем константу $C_0 = u(x_0, y_0)$ и определим функцию $y(x)$ как неявно заданную уравнением $u(x,y) = C_0$. Получим решение задачи Коши с заданными начальными условиями. Доказано, что $u(x,y) = C$ – общее решение.

Теорема 4.8.2. *Пусть N, M, N'_x, M'_y непрерывны в некоторой односвязной области D. Тогда (4.25) будет уравнением в полных дифференциалах в том и только том случае, когда в этой области выполнено условие*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{4.26}$$

Доказательство. Доказательство части "и только том случае" следует из теоремы о смешанных производных. Пусть верно (4.26). Ищем функцию $u(x, y)$ из условия

$$\begin{cases} u'_x = M \\ u'_y = N \end{cases} \tag{4.27}$$

Выберем начальную точку $(x_n, y_n) \in D$. Из первого уравнения (4.27) находим: $u(x, y) = \int_{x_n}^{x} M\,dx + \varphi(y)$. Тогда

$$u'_y = \int\limits_{x_n}^{x} M'_y dx + \varphi'(y) = \int\limits_{x_n}^{x} N'_x dx + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_n, y) + \varphi'(y)$$

Следовательно, второе уравнение системы (4.27) получает вид $\varphi'(y) = N(x_n, y)$, откуда находим $\varphi(y) = \int_{y_n}^{y} N(x_n, y)\,dy$. Окончательно получаем *формулу вычисления потенциала*

$$u(x, y) = \int\limits_{x_n}^{x} M(x, y) dx + \int\limits_{y_n}^{y} N(x_n, y)\,dy$$

$\square$

Найдём общий интеграл уравнения

$$(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$$

Проверим, что это уравнение в полных дифференциалах, ибо

$$\frac{\partial(x + y - 1)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(e^y + x)}{\partial x}$$

Возьмём $x_n = 0$, $y_n = 0$. Тогда

$$u(x, y) = \int\limits_{0}^{x} (x + y - 1)dx + \int\limits_{0}^{y} e^y\,dy = \frac{x^2}{2} + yx - x + e^y - 1$$

Откуда

$$\frac{x^2}{2} + yx - x + e^y = C$$

– общее решение в неявной форме.

Решим уравнение в полных дифференциалах $(y + xy^2)dx - xdy = 0$. Ответ: $y = -\frac{2x}{x^2+C}$.

4.9 Дифференциальные уравнения высших порядков

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка в нормальной форме

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{4.28}$$

Начальным условием для уравнения (4.28) называется строка чисел $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$.

Теорема 4.9.1 (существования и единственности). *Пусть функция f вместе со своими частными производными по всем переменным, кроме быть может первой, непрерывна в некоторой области D пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащей точку $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$. Тогда существует решение $y = \varphi(x)$ уравнения (4.28) такое, что*

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_0',\ ..., \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{4.29}$$

Задача Коши для уравнения (4.28) как раз и состоит в том, что бы найти решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, т.е. для которого верно (4.29).

4.9.1 Геометрическая интерпретация уравнения второго порядка

Пусть надо решить уравнение $y'' = f(x, y, y')$. Обозначим через φ угол между касательной и осью Ox. Тогда $y' = \operatorname{tg}\varphi$ и

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$$

– радиус кривизны интегральной кривой в данной точке. (Заметим, что R принимает и отрицательные значения $\Leftrightarrow$ график выпукл вверх). Далее $y'' = 1/(R|\cos^3\varphi|)$ и уравнение $y'' = f(x, y, y')$ перепишется так:

$$\frac{1}{R|\cos^{\varphi}|} = f(x, y, \operatorname{tg}\varphi) \Leftrightarrow R = \frac{1}{|\cos^3\varphi| f(x, y, \operatorname{tg}\varphi)}$$

Отсюда вытекает способ приближённого построения интегральной кривой при помощи гладкой кривой, составленной из дуг окружностей. Это значит надо провести интегральную кривую, которая в любой точке имеет кривизну, определяемую по коэффициенту наклона касательной.

4.9.2 Закон сохранения энергии

Любое уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ можно записать в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} p' = f(x, y, p); \\ y' = p. \end{cases} \tag{4.30}$$

Пусть $mx'' = F(t, x, x')$ – уравнение, описывающее движение точки. Перейдем к системе

$$\begin{cases} x' = & v \\ mv' = & F(t, x, v) \end{cases} \tag{4.31}$$

Умножая второе уравнение на v и интегрируя по t, получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} mvv'\,dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} F(t, x, v)v\,dt$$

В левой части интеграл вычисляется сразу, а в правой части применим формулу замены переменной с занесением v под знак дифференциала – $vdt = dx$:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

или

$$\frac{mv_1^2}{2} - \int\limits_{x_n}^{x_1} F\,dx = \frac{mv_2^2}{2} - \int\limits_{x_n}^{x_2} F\,dx \tag{4.32}$$

где x_n – какое-либо начало отсчёта.

Величина $U = -\int\limits_{x_n}^{x} Fdx$ называется *потенциальной энергией*. Величина $K = \frac{mv^2}{2}$ называется *кинетической энергией*. Величина $E = K + U$ называется *полной энергией*

Доказан **закон сохранения энергии**: *при движении точки полная энергия остаётся постоянной.*

4.10 Неполные уравнения высших порядков

Неполные уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ Такого рода уравнения решаются n-кратным повторным интегрированием.

Пример. Решим уравнение $y^{(n)} = 0$. Имеем

$$y^{(n-1)} = C_1, \quad y^{(n-2)} = C_1x + C_2, ...$$
$$y = C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + C_{n-1}x + C_n$$

Неполные уравнения вида $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n-1)})$ Эти уравнения допускают понижение порядка, если воспользоваться подстановкой $z = y^{(k)}$.

Пример Решить уравнение $y''' = y''$. Подставляя $z = y''$, находим $z' = z$, откуда $z = C_1e^x$. Тогда $y'' = C_1e^x$ – уравнение вида **??**. Тогда $y' = C_1e^x + C_2$ и окончательно,

$$y = C_1e^x + C_2x + C_3$$

Неполные уравнения вида $y'' = f(y, y')$ Такого рода уравнения сводятся к уравнениям первого порядка заменой переменной x на переменную y и неизвестная функция $y(x)$ заменяется на неизвестную функцию $p = p(y) = y'$. Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Следовательно, уравнение $y'' = f(y, y')$ перепишется в виде

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

Если это уравнение разрешимо, и $p = \alpha(y, C_1)$ – его общее решение, то и исходное уравнение разрешимо в квадратурах, ибо $y' = \alpha(y, C_1)$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Решим уравнение $y''(3y - 2y') = y'^2$. Подставляя $p = y'$, $p\frac{dp}{dy} = y''$, получим

$$p\frac{dp}{dy}(3y - 2p) = p^2$$

Случай 1. $p = 0$. Отсюда $y = C$.

Случай 2. $p \neq 0$. Тогда $\frac{dp}{dy} = \frac{p}{3y-2p}$ или

$$\frac{dy}{dp} = 3\frac{y}{p} - 2$$

Это однородное уравнение первого порядка. Заменяя $\frac{y}{p} = u$, $y = up$, $y'_p = u + pu'$, получим

$$u + pu' = 3u - 2 \Rightarrow pu' = 2u - 2 \Rightarrow \frac{du}{u-1} = 2\frac{dp}{p}$$

Интегрируя, имеем: $\ln|u-1| = 2\ln|p| + C$, откуда $u - 1 = Cp^2$ или $\frac{y}{p} - 1 = C_1p^2$. Считая p параметром, получаем выражение y через параметр: $y = p + C_1p^3$. Для того, что бы найти $x = x(p)$, вспомним, что $dy = pdx = (1 + 3C_1p^2)dp$. Отсюда $dx = (1/p + 3C_1p)dp$ и $x = \frac{3}{2}C_1p^2 + \ln|p| + C_2$. Окончательно,

$$\begin{cases} x = & \frac{3}{2}C_1p^2 + \ln|p| + C_2 \\ y = & p + C_1p^3 \end{cases}$$

Глава 5

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1 Линейные дифференциальные уравнения.

Определение 5.1.1. Дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = b(x) \tag{5.1}$$

называют *линейным неоднородным д. уравнением* или *линейным д. уравнением с правой частью.* Уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \tag{5.2}$$

– называют *линейным однородным д. уравнением.*

Заметим, что для существования и единственности решения задачи Коши достаточно потребовать непрерывности функций $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ и неравенства $a_0(x) \neq 0$. В этом случае можно поделить на $a_0(x)$ и считать тем самым, что старший коэффициент равен 1.

Непрерывность функций $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), b(x)$ в дальнейшем предполагается и особо не оговаривается.

Обозначим

$$\mathcal{L} = a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n$$

– *дифференциальный оператор n-го порядка.* Он линеен, т.е.

$$\mathcal{L}(y_1(x) + y_2(x)) = \mathcal{L}(y_1(x)) + \mathcal{L}(y_2(x)); \quad \mathcal{L}(\lambda y(x)) = \lambda\mathcal{L}(y(x))$$

для любых дифференцируемых достаточное число раз функций y_1, y_2, y и числа λ. Отсюда немедленно следуют два результата.

Теорема 5.1.2. *Пространство решений линейного однородного уравнения линейно.*

Теорема 5.1.3. *Пусть $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ – общее решение однородного уравнения (5.2), а y^* – частное решение неоднородного уравнения (5.1). Тогда $y^*(x) + \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ – общее решение неоднородного уравнения.*

Напомним, что функции $y_1, \dots, y_n$ называются *линейно зависимыми*, если найдутся константы $C_1, \dots, C_n$ не все 0 и такие, что $C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0$. В противном случае эти функции называются *линейно независимыми*. Линейная независимость двух функций равносильна тому, что их отношение не равно константе.

Определение 5.1.4. Пусть функции $y_1, \dots, y_n$ дифференцируемы по крайней мере $n-1$ раз. Тогда функция

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского.*

Считаем далее $a_0(x) \equiv 1$.

Предположим, что $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ – строка частных решений однородного уравнения (5.2). Обозначим $W(x) = W(\mathbf{y})$. Мы хотим получить дифференциальное уравнение, которому будет удовлетворять W. Для этого надо продифференцировать W. Чтобы решить эту задачу вспомним, что определитель – полилинейная функция своих строк $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$,..., $\mathbf{y}^{(n-1)}$. Применяя правило Лейбница, получим:

$$W' = \begin{vmatrix} \mathbf{y}'(x) \\ \mathbf{y}'(x) \\ \dots \\ \mathbf{y}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{y}(x) \\ \mathbf{y}''(x) \\ \dots \\ \mathbf{y}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \mathbf{y}(x) \\ \mathbf{y}'(x) \\ \dots \\ \mathbf{y}^{(n)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{y}(x) \\ \mathbf{y}'(x) \\ \dots \\ \mathbf{y}^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

так первые $(n-1)$ определители равны нулю (одинаковые две строки). Подставляя

$$\mathbf{y}^{(n)}(x) = -(a_1 \mathbf{y}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\mathbf{y}' + a_n \mathbf{y})$$

в последнюю строку, и раскладывая в сумму n определителей, получим снова одно ненулевое слагаемое-определитель

$$-a_{n-1} \begin{vmatrix} \mathbf{y}(x) \\ \mathbf{y}'(x) \\ \dots \\ \mathbf{y}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -a_{n-1} W$$

Окончательно получаем:

$$\frac{dW}{dx} = -a_1(x)W \tag{5.3}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными и его общее решение

$$W(y_1, \ldots, y_n) = C \cdot \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)dt\right) \tag{5.4}$$

– **формула Лиувилля**. Как следствие получаем следующие свойства определителя Вронского.

Свойство 1 *Пусть* $W(y_1, \ldots, y_n)\,|_{x=x_0} = 0$ *для некоторых частных решений* $y_1, \ldots, y_n$ *однородного линейного уравнения (5.2). Тогда функции* $y_1, \ldots, y_n$ *линейно зависимы, и их определитель Вронского тождественно равен 0.*

Доказательство. Столбцы определителя Вронского линейно зависимы (применяем теорему о базисе линейного пространства столбцов). Следовательно найдутся константы $C_1, \ldots, C_n$ не все равные 0 и такие, что функция $y = C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$ имеет нулевые начальные условия в точке $x = x_0$, при этом функция $y(x)$ – решение однородного уравнения согласно теореме 5.1.2. Но нулевая функция также решение с те ми же начальными условиями. Теорема существования и единственности даёт тождество $C_1y_1 + \cdots C_ny_n \equiv 0$, отсюда получаем, что функции $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависимы. □

Свойство 2. *Если* $y_1, \ldots, y_n$ *– линейно независимые решения однородного уравнения (5.2), то их определитель Вронского не равен 0 ни в одной точке.*

Свойство 3. *Если нам известны* $n-1$ *линейно независимых частных решений* $y_1, \ldots, y_{n-1}$ *однородного уравнения, то для того, что бы найти решение* y_n*, линейно независимое от предыдущих, достаточно решить линейное неоднородное уравнение* $n-1$*-го порядка:*

$$y_n^{(n-1)}A_{nn} + y_n^{n-2}A_{n-1n} + \ldots + y_nA_{1n} = C\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt\right)$$

(Здесь A_{in} – алгебраические дополнения в определителе Вронского).

Пример. Легко проверить, что $y_1 = x$ – решение уравнения $(1-x^2)y'' - 2xy + 2y = 0$. Далее находим $a_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$ и

$$W = C\exp\left(\int_0^x \frac{2x\,dx}{1-x^2}\right) = \frac{C}{|1-x^2|}.$$

Тогда второе решение находим решая уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = \frac{1}{x|1-x^2|}$$

или
$$y'x - y = \frac{1}{x|1-x^2|}$$
Применяя метод вариации постоянных, получаем
$$y = x\int \frac{dx}{x^2|1-x^2|} = x\int\left(\pm\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right)dx = x\left(\pm\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$
$=$
$$= \pm 1 + \frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

Для произвольных функций определитель Вронского может быть равен 0 в некоторых точках. Например, $W(1, x^2) = 2x$ равен 0 при $x = 0$ и отличен от 0 в остальных точках.

Определение 5.1.5. Набор n линейно независимых решений однородного уравнения (5.2) называется *фундаментальной системой решений*

Теорема 5.1.6 (основная о структуре пространства решений однородного линейного дифференциального уравнения)**.** *Пусть $y_1, \dots, y_n$ – ф.с.р. уравнения (5.2). Тогда*
$$C_1y_1 + \dots + C_ny_n$$
– общее решение уравнения (5.2).

Доказательство. В силу теоремы 5.1.3 остаётся доказать, что для любых начальных условий $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ найдутся константы $C_1^0, \dots, C_n^0$ такие, что $C_1^0y_1 + \dots + C_n^0y_n$ – решение задачи Коши. Это следует из того, что система линейных уравнений
$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \dots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$
(относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$) определена, так как её определитель есть в точности определитель Вронского $W(y_1, \dots, y_n)_{/x=x_0}$, который не равен 0 в силу свойства 2. □

Замечание 5.1.7. Не существует общего метода для нахождения в конечном виде общего решения линейного уравнения с переменными коэффициентами.

5.2 Линейные однородные дифф. уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Имеем уравнение
$$y'' + py' + qy = 0 \tag{5.5}$$

где $p, q \in \mathbb{R}$. Ищем решение в виде $e^{\lambda x}$. Эта функция будет решением (5.5) тогда и только тогда, когда λ – корень уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{5.6}$$

Оно называется *характеристическим.* Пусть λ_1, λ_2 его корни.

Случай 1. $D = p^2 - 4q > 0$. Тогда $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ – общее решение.

Случай 2. $D < 0$. Тогда $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ и $\beta \neq 0$. Тогда наряду с комплексными решениями $e^{\lambda_{1,2} x}$ будут и два действительных линейно независимых.

$$e^{\alpha x} \cos \beta x = \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}}{2} \quad e^{\alpha x} \sin \beta x = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{2i}$$

Отсюда $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ – общее решение.

Случай 3. $D = 0$. Тогда убеждаемся прямой проверкой, что $x e^{\lambda_1 x}$ также решение и поэтому общее решение имеет вид

$$e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)$$

5.3 Линейные д. однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Обобщим метод решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами на случай произвольного порядка. Решаем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{5.7}$$

где $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Как и ранее, сопоставим левой части уравнения (5.7) дифференциальный оператор $\mathcal{L}$. Удобно обозначить $p = \frac{d}{dx}$ и тогда $\mathcal{L}$ превращается в дифференциальный многочлен $p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n$. Степень оператора p^k понимается как k-кратное применение оператора дифференцирования p. Решение уравнения (5.7) будем искать в виде $y = e^{kx}$, где k, вообще говоря, комплексное число. Подставляя в (5.7), получаем

$$k^n e^k x + a_1 k^{n-1} e^k x + \cdots + a_{n-1} k e^k x + a_n e^k x = 0$$

Сокращая на $e^k x$ (эта функция никогда не равна нулю), приходим к *характеристическому (алгебраическому) уравнению*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{5.8}$$

Доказано, что комплекснозначная функция e^{kx} будет решением уравнения (5.7) в том и только том случае, когда k – корень характеристического уравнения (5.8). Если $k = \alpha + i\beta$ – комплексное число ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), причем $\beta \neq 0$, то сопряженное число $\alpha - i\beta$ будет также корнем характеристического уравнения (5.8) и функции $e^{kx} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$, $e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$ будут комплекснозначными решениями дифференциального уравнения (5.7). Чтобы перейти к паре линейно независимых действительнозначных решений, надо взять полусумму и полуразность деленную на i:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}; \quad e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2i}.$$

Прямые вычисления позволяют заключить

Лемма 5.3.1. *Пусть $k \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$(p-k)[x^m e^{mx}] = \begin{cases} mx^{m-1}e^{kx}, & \textit{при } m > 0 \\ 0, & \textit{если } m = 0 \end{cases}$$

$$(p-k)^t[x^m e^{mx}] = \begin{cases} m(m-1)...(m-t+1)x^{m-t}e^{kx}, & \textit{при } m \geq t \\ 0, & \textit{если } m < t \end{cases}$$

□

Напомним, что уравнение (5.7) записывается в виде $\mathcal{L}(y) = 0$.

Теорема 5.3.2. *1. Каждому действительному корню k кратности m характеристического уравнения отвечает m частных решений*

$$e^{kx}, \quad xe^{kx}, \ldots, x^{m-1}e^{kx}.$$

2. Каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm \beta$ ($\beta \neq 0$) кратности m характеристического уравнения отвечает k пар частных решений

$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x \\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{gathered}$$

3. Набор частных решений построенный по всем корням в соответствие с пп. 1 и 2 будет ф.с.р.

Доказательство. Ввиду леммы 5.3.1 получаем утверждения 1 и 2. Остаётся доказать линейную независимость набора решений, построенный по всем корням в соответствие с пп. 1 и 2. Предположим, что этот набор $y_1, ..., y_n$ линейно зависим, т.е. $C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \equiv 0$ для некоторых $C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}$ не все из которых нули, причем эта линейная зависимость с наименьшим количеством ненулевых слагаемых.

Пусть $y_1 = e^{\alpha x}, ..., y_m = x^{m-1} e^{\alpha x}$ соответствуют корню k кратности m и не все из $C_1, ..., C_m$ равны 0. Подействуем оператором $(p-k)^{m+1}$ на $C_1 y_1 + \cdots + C_m y_m$. В силу леммы 5.3.1 получим ноль. Заметим, что если $C_j = 0$ для всех $j > m$, то нечего доказывать – степени x^i конечно линейно независимы. Считаем, что $m < n$ и один из C_j при $j > m$ не равен 0. Теперь заметим, что $(p-k)^{m+1}[y_i]$ при $i > k$ – ненулевой квазимногочлен с тем же показателем при экспоненте. Получаем в итоге

$$0 = (p-k)^{m+1}(C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n) = C_{m+1}\tilde{y}_{m+1} + \cdots + C_n \tilde{y}_n$$

– линейная зависимость с меньшим числом слагаемых. Полученное противоречие доказывает линейную независимость. □

Пример. Решим уравнение $y^{IV} - y = 0$. Его характеристическоеуравнение имеет корни ± 1, $\pm i$ – простой спектр. Отсюда

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

– общее решение.

5.4 Неоднородные линейные уравнения второго порядка.

Решаем уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{5.9}$$

Рассмотрим также однородное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{5.10}$$

Общее решение этого уравнения обозначим $C_1 y_1 + C_2 y_2$ и будем считать известным.

5.4.1 Метод вариации постоянных

Решение уравнения (5.9) ищем в виде $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, где $C_1(x), C_2(x)$ неизвестные функции, подлежащие определению. Имеем

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2$$

Положим $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$ (*). Тогда

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'$$

Подставляя y' и y'' в (5.9), получим

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1'C_2'y_2' + a_1(C_1y_1' + C_2y_2') + a_2(C_1y_1 + C_2y_2) = f(x)$$

или

$$C_1(y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + C_2(y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

или

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x)$$

С учётом (*), получаем систему из которой находятся функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ интегрированием:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases} \tag{5.11}$$

Пример. Решим д. уравнение $y'' - \frac{y'}{x} = x$. Общее решение однородного будет иметь вид: $C_1x^2 + C_2$. (Заметим, что определитель Вронского не равен 0 ни в одной точке, где функции $1/x$, x непрерывны). Решение уравнения ищем в виде $C_1(x)x^2 + C_2(x)$. Функции C_1, C_2 находим из системы

$$\begin{cases} C_1'x^2 + C_2' = 0 \\ C_1' \cdot 2x + C_2' \cdot 0 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = 1/2 \\ C_2'(x) - 1/2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \frac{x}{2} + C_1 \\ C_2(x) = -\frac{x^3}{6} + C_2 \end{cases}$$

Тогда общее решение исходного уравнения будет

$$\frac{x^3}{2} + C_1x^2 - \frac{x^3}{6} + C_2 = \frac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$$

В силу линейности дифференциального оператора $\mathcal{L}$, получаем

Теорема 5.4.1 (метод суперпозиции). *Решение y^* уравнения $y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x) + f_2(x)$ можно представить в виде суммы $y^* = y_1^* + y_2^*$, где y_1^* и y_2^* есть решения уравнений $y'' + a_1y' + a_2y = f_1(x)$ и $y'' + a_1y' + a_2y = f_2(x)$.*

5.5 Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Решаем уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{5.12}$$

где правая часть $f(x)$ имеет специальный вид.

Случай 1: $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Подслучай а) – α не является корнем характеристического уравнения.

Тогда частное решение можно найти в виде $y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Подслучай б) – α совпадает ровно с одним корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение можно найти в виде $y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Подслучай в) – α – двукратный корень характеристического уравнения. Тогда частное решение можно найти в виде $y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n.

Пример Для уравнения $y'' + 4y' + 3y = x$ общее решение однородного – $C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. Частное решение ищем в виде $y^* = Ax + B$. Находим $4A + 3(Ax + B) = x \Rightarrow A = 1/3$, $B = -4/9$. Итак $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$ – общее решение.

Пример Уравнение $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$ имеет общее решение

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x$$

Случай 2 $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены, наибольшая степень которых равна n и предполагается, что $\beta \neq 0$

Подслучай а) – $\alpha + i\beta$ не корень характеристического уравнения. Тогда частное решение можно найти в виде $y^* = \tilde{P}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + \tilde{Q}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ – многочлены степени n.

Подслучай б) – $\alpha + i\beta$ корень характеристического уравнения. Тогда частное решение можно найти в виде $y^* = x\tilde{P}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x\tilde{Q}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ – многочлены степени n.

Пример Общее решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$ имеет вид

$$y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

Пример Общее решение уравнения $y'' + 4y = \cos 2x$ имеет вид

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x$$

5.6 Неоднородные линейные уравнения высших порядков

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = b(x) \tag{5.13}$$

Пусть нам известно общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \tag{5.14}$$

– $C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$.

Метод вариации постоянных Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ - ф.с.р. уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \tag{1}$$

и мы решаем неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{2}$$

Будем искать общее решение в виде

$$y = C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n$$

где $C_1(x), \cdots C_n(x)$ подлежат определению. Дифференцируем:

$$y' = C_1 y_1' + \cdots + C_n y_n' + C_1' y_1 + \cdots + C_n' y_n$$

Положим

$$C_1' y_1 + \cdots + C_n' y_n = 0 \tag{3.1}$$

Тогда $y' = C_1 y_1' + \cdots + C_n y_n'$, поэтому

$$y'' = C_1 y_1'' + \cdots + C_n y_n'' + C_1' y_1' + \cdots + C_n' y_n'$$

Положим

$$C_1' y_1' + \cdots + C_n' y_n' = 0 \tag{3.2}$$

Тогда $y'' = C_1 y_1'' + \cdots + C_n y_n''$ и найдем y''' и т.д. до производной

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + \cdots + C_n y_n^{(n)} + C_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)}$$

Здесь мы уже не будем полагать вторую часть равной нулю, а подставим найденные значения $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ в (2)

Для получения последнего уравнения (3.n) удобно воспользоваться знаком суммирования:

$$y^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(i)} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n}[C_k y_k^{(n)} + a_1(x)C_k y_k^{(n-1)} + \dots + a_n(x)C_k y_k] + C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Но выражение в квадратных скобках равно нулю при любом k. Отсюда вытекает

$$C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \tag{3.n}$$

Итак (3.1)-(3.n) – система линейных уравнений на $C_1', \dots, C_n'$ с определителем Вронского $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$. Следовательно, она имеет однозначное решение и функции $C_1(x), \dots, C_n(x)$ затем находятся интегрированием.

Итог: решение уравнения (5.13) ищем в виде $C_1(x)y_1 + \dots + C_n(x)y_n$, где $C_1(x), \dots, C_n(x)$ – неизвестные функции, определяемые из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n & = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} & = f(x) \end{cases} \tag{5.15}$$

Пример. Решим дифференциальное уравнение $y'' + 4y = 1/\sin^2 x$. Находим $C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ –общее решение соответствующего однородного уравнения. Далее составляем систему для функций $C_1'(x), C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x & = 0 \\ C_1'(-2\sin 2x) + C_2'(2\cos 2x) & = 1/sin^2 x \end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_2' = \frac{\cos 2x}{2\sin^2 x} \Rightarrow C_2(x) = \int \frac{1 - 2\sin^2 x}{2\sin^2 x} dx = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x - x + C_2$$

$$C_1' = -\frac{\sin 2x}{2\sin^2 x} \Rightarrow C_1(x) = -\int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin^2 x} dx = \ln|\sin x| + C_1$$

Ответ: $y = (-\ln|\sin x| + C_1)\cos 2x + (-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x - x + C_2)\sin 2x$

Метод подбора частного решения. Решаем уравнение
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{1}$$
где $f(x)$ имеет специальный вид:

А. $f(x) = e^{kx} P_m(x)$ где P_m-многочлен степени m

Б. $f(x) = e^{kx} \cos \omega x P_m(x) + e^{kx} \sin \omega x Q_m(x)$

В. $f(x)$-линейная комбинация квазимногочленов, т.е. функций типа А и Б

Достаточно найти для (1) частное решение.

А. Пусть k имеет кратность r в характерном уравнении ($r = 0$ по определению значит, что k не является корнем характеристического уравнения). Тогда частное решение ищем в виде
$$y^* = x^r e^{kx} S_m(x) \tag{2}$$
где $S_m(x)$-многочлен степени m с неопределенными коэффициентами. Подставим (2) в (1)
$$\mathcal{L}\ (x^r e^{kx} S_m(x)) = f(x) = e^{kx} P_m(x)$$
Разложим дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ по степеням $\frac{d}{dx} - k$. Тогда $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \left(\frac{d}{dx} - k\right)^r$,где
$$\mathcal{L}_1 = \left(\frac{d}{dx} - k\right)^{n-r} + \ldots + b_{n-r}\left(\frac{d}{dx} - k\right) + b_{n-r}$$
и $b_{n-r} \neq 0$. Так как
$$\left(\frac{d}{dx} - k\right)[e^{kx} P] = k e^{kx} P',$$
то ???

Б. Пусть $f(x) = P(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$, и $\alpha + i\beta$ – k-кратный корень характеристического уравнения. Тогда частное решение можно найти в виде $y^* = x^k(\tilde{P}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + \tilde{Q}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$, где многочлены $\tilde{P}, \tilde{Q}$ имеют степень равную максимальной из степеней многочленов P и Q.

Пример Общее решение уравнения $y^{IV} - y = x^3 + 1 + 5\cos x$ имеет вид
$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1 - \frac{5}{4} x \sin x$$

5.6.1 Дифференциальное уравнение механических колебаний

Пусть груз массой m прикреплен к пружине которая действует на него с силой $F = -ky$ и кроме того действует сила сопротивления $F = -\lambda v$. Тогда уравнение *свободных колебаний* будет таким
$$m\frac{d^2 y}{dt^2} + ky + \lambda \frac{dy}{dt} = 0 \tag{5.16}$$

или

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{5.17}$$

Если предположить, что нижний конец пружины прикреплен к катку, который движется по неровности $\varphi(t)$, то получим уравнение *вынужденных* колебаний

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky + \lambda\frac{dy}{dt} = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t) \tag{5.18}$$

или

$$y'' + py' + qy = f(t) \tag{5.19}$$

Решим сначала уравнение свободных колебаний

Случай 1 $D = p^2 - 4q > 0$. Тогда корни хар. уравнения отрицательны, и $y \to 0$ при $t \to \infty$ (случай большого сопротивления)

Случай 2 $D = 0$. Тогда $y = (C_1 + C_2t)e^{-pt/2}$. Всё равно $y \to 0$ при $t \to \infty$.

Случай 3 $p = 0$. Тогда $y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$, где $\beta = \sqrt{q}$. Общее решение можно записать в виде $y = A \sin(\beta t + \varphi_0)$, где A – *амплитуда*, а φ_0 – *начальная фаза* колебаний.

Эти колебания можно описать также комплекснозначной функцией $Ae^{i(\beta t + \varphi_0)}$, значения которой можно представить как вектор на комплексной плоскости.

Случай 4. $p \neq 0$ и $D < 0$. Тогда корни хар. уравнения комплексные – $\alpha \pm i\beta$, где $\alpha = -\frac{p}{2}$ и $\beta = \sqrt{-D}/2$. Общее решение имеет вид

$$Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0)$$

Это *затухающие колебания* с амплитудой $Ae^{\alpha t}$ стремящейся к 0 при $t \to \infty$.

5.6.2 Вынужденные колебания

Решаем уравнение (5.19), где $f(t) = a \sin \omega t$.

Случай 1 $i\omega$ не является корнем хар. уравнения. Тогда общее решение имеет вид $y = C_1y_1 + C_2y_2 + B\sin(\omega t + \varphi^*)$.

Случай 2 (резонанса). $p = 0$ и $\omega = \sqrt{q}$. Тогда общее решение имеет вид

$$(A + Bt)\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Видим, что амплитуда этих колебаний стремится к бесконечности.

5.7 Системы линейных уравнений

Рассмотрим *нормальную систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.*

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{5.20}$$

Задача Коши для этой системы – найти решение $\mathbf{y}(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}$.

5.7.1 Метод исключения

Можно свести решение системы (5.20) к решению одного уравнения n-го порядка следующим образом.

1. Дифференцируем первое уравнение $n-1$ раз, каждый раз записывая правую часть через переменные $x, y_1, \dots, y_n$. Будем иметь

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = F_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \tag{5.21}$$

2. Исключая из первых $n-1$ уравнения системы (5.21) $y_2, \dots, y_n$ получим

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \end{cases} \tag{5.22}$$

3. Подставляя (5.22) в последнее уравнение системы (5.21), получим

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \tag{5.23}$$

4. Решаем уравнение (5.23) – $y_1 = \psi(x, C_1, \dots, C_n)$.

5. Вычисляя $y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$ и подставляя это в (301507), находим оставшиеся функции $y_2, \ldots, y_n$.

Пример

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z + x \\ \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2y}{dx} = -3y - 2z + 3x + 1 \\ z = y' - y - x \end{cases}$$

Отсюда

$$y'' + 2y' + y = 5x + 1$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9$. Тогда

$$z = y' - y - x = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14$$

5.8 Линейные системы с постоянными коэффициентами

Решаем системы вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n) \end{cases} \tag{5.24}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Будем искать решение в виде

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx},\ y_2 = \alpha_2 e^{kx},\ \ldots,\ y_n = \alpha_n e^{kx} \tag{5.25}$$

Тогда (5.25) – решение (5.24) в том и только том случае, когда k - собственное число, а $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – собственный вектор матрицы $A = (a_{ij})$.

Рассмотрим только один случай – все собственные числа действительны и попарно различны – $k_1, \ldots, k_n$. Пусть $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ – собственные вектора, соответствующие этим собственным числам. Тогда общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = C_1 e^{k_1x}\mathbf{p}_1 + C_2 e^{k_2x}\mathbf{p}_2 + \ldots + C_n e^{k_nx}\mathbf{p}_n \tag{5.26}$$

Литература

[1] Берман. Сборник задач по высшей математике.

[2] *Данко*, П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах : Ч1/Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. — 6-е изд. — Москва : Оникс 21 век : Мир и Образование, 2003. — 304 с.

[3] *Дубровин*, Н.И. Математический анализ 1. Курс лекций./Н.И. Дубровин. Владимир 2017. ВлГУ.– 143с.

[4] *Дубровин*, Н. И. Задания к типовым расчетам по математике /Дубровин Н. И. Владимирский политехнический институт. Владимир. 1993 .— 64 с.

[5] *Зорич*, В.А. Математический анализ. Часть 1./В.А. Зорич. – М.: Фазис, 1997.—554с.

[6] *Пискунов*, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т1./Пискунов Н. С.— Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2003 .— 415 с.

[7] *Фихтенгольц*, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1./Г.М. Фихтенгольц – М.: Наука, 1969. – 608 с.