# Оглавление

# Введение

Пособие соответствует курсу лекций, читаемому автором для студентов инженерных специальностей в первом семестре (36 часов). Оно охватывает следующие темы: 1) матричная алгебра и системы линейных уравнений, 2) векторная алгебра, 3) элементы аналитической геометрии, 4) введение в анализ (пределы и непрерывность), 5) производная и основные теоремы дифференциального исчисления, 6) исследование функций. Темам 1-3 уделено значительное внимание, хотя теория определителей изложена только для матриц малых порядков.

Изложение разбито на восемнадцать лекций в соответствии с выделенным временем. В конце каждой лекции приведен небольшой список задач. Эти задачи не являются проверочными (за таковыми можно обратиться к замечательному задачнику [1]).

Практически все теоремы изложены с доказательствами, что при чтении лекций, в рамках отведенных часов, не достижимо. Все же некоторые принципиальные результаты доказываются студенческой аудитории. Например, правило Крамара, первый замечательный предел, теорема Больцано-Коши о промежуточном значении, теорема Лагранжа, локальная формула Тейлора и др.

Другие результаты (например, построение поля действительных чисел, второй замечательный предел, теорема Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа) доводятся до сведения студентов только в виде формулировок ввиду технически сложных доказательств и специфики инженерной студенческой аудитории. Вместо доказательств автор при чтении лекций предъявляет мотивировку и объясняет важность данных теорем, прибегая к задачам из других наук и из других сфер. Например, для объяснения числа e предлагается решить задачу о непрерывном начислении процентов при фиксированной готовой ставке, для решения уравнения $f(x) = 0$ методом дихотомии предлагается "пострелять" из пушки по неподвижной мишени и т.п. Все эти лекционные отступления в данное пособие не включены, но автор считает их абсолютно необходимыми при устном изложении материала (не говоря уж о всяких "геометрических и механических смыслах" тех или иных результатов).

# Список математический обозначений

- $a \in A$ – элемент $a$ принадлежит множеству $A$
- $B \subseteq A$ – множество $B$ есть подмножество множества $A$
- $B \subset A$ – множество $B$ содержится в множестве $A$, но не совпадает с $A$
- $\emptyset$ – пустое множество, не содержит ни одного элемента
- $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$
- $\{x \in U \mid \mathcal{A}(x)\}$ – совокупность всех элементов из множества $U$, подчиняющихся условию $\mathcal{A}(x)$
- $(a; b)$ – пара элементов; считаем $(a, b) = (a', b')$ тогда и только тогда, когда $a = a'$ и $b = b'$
- $A \times B$ – декартово произведение множества $A$ на множество $B$
- $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ – объединение, пересечение и теоретико-множественная разность множеств $A, B$
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ – множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел
- $\mathcal{A} \;\Rightarrow\; \mathcal{B}$ – из утверждения $\mathcal{A}$ следует (вытекает) утверждение $\mathcal{B}$
- $\mathcal{A} \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{B}$ – утверждения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ эквивалентны, т.е. утверждение $\mathcal{A}$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо $\mathcal{B}$
- $\exists x \in U : \mathcal{A}(x)$ – существует элемент $x_0$ из множества $U$ такой, что утверждение $\mathcal{A}(x_0)$ верно; здесь $\mathcal{A}(x)$ – некоторое высказывание, зависящее от переменной $x$
- $(\forall x \in U)\, \mathcal{A}(x)$ – для любого элемента $x_0 \in U$ верно $\mathcal{A}(x_0)$
- $|x|, \operatorname{sgn} x$ – модуль и знак числа
- $P(x_P, y_P, z_P)$ – точка $P$ в пространстве, имеющая (декартовы) координаты $x_P, y_P, z_P$
- $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ – вектор $\mathbf{a}$ в пространстве, имеющий (декартовы) координаты $a_x, a_y, a_z$

- $\det A$ – определитель матрицы $A$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ – скалярное произведение двух векторов
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ – векторное произведение двух векторов
- $\lim u_n$ – предел числовой последовательности $u_n$ при $n \to \infty$
- $\lim_{x \to a} f(x)$ – предел функции $f(x)$ при $x \to a$
- $\lim_{x \to a+0} f(x)$ – предел функции $f(x)$ при $x \to a$ справа
- $\lim_{x \to a-0} f(x)$ – предел функции $f(x)$ при $x \to a$ слева
- $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$ – производная функции $f(x)$
- $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f}{dx^n}$ – производная n-го порядка функции $f(x)$
- $df(x)$, $d^n f(x)$ – дифференциал и дифференциал n-го порядка функции $f(x)$

# ЛЕКЦИЯ I
## Числовая система

Числа бывают разной природы – натуральные $\mathbb{N}$, целые $\mathbb{Z}$, рациональные $\mathbb{Q}$ и действительные (вещественные) $\mathbb{R}$. Эти числовые системы образуют последовательность

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

где каждая последующая система богаче и обширней предыдущей и по количеству операций, и по возможностям решения разнообразных уравнений. Изобретение этой числовой системы со всеми правилами, точными определениями понятий, алгоритмами операций – величайшее достижение человеческого духа. Мало с чем оно может быть сравнимо по используемости, завершенности, практичности.

**I.1. Натуральные числа** состоят из элементов $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. На этом множестве определены операции сложения и умножения, а также порядок $n \leq m$ обладающий свойством вполне упорядоченности: *любое непустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент:*

$$\forall S \subseteq \mathbb{N}\, (S \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \exists \min S).$$

Произвольное натуральное число в *десятичной системе счисления* имеет вид

$$n = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{1.1}$$

где все $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – цифры.

Говорим, что $a$ делит $b$ (обозначение: $a \mid b$), если существует число $c$ такое, что $b = ac$. Если $2 \mid b$, то $b$ называют *четным числом*, а, если это не так, то $b$ называют *нечетным числом. Деление с остатком* числа $n$ на $m \neq 0$ заключается в представлении

$$n = m \cdot q + r; \quad 0 \leq r < m,$$

что всегда осуществимо. Здесь $r$ – *остаток*, а $q$ – *неполное частное*

Натуральное число $p > 1$ называется *простым*, если оно имеет ровно два натуральных делителя: $p$ и 1. Первые несколько простых чисел суть:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, \ldots$$

**Основная теорема арифметики**. *Любое натуральное число $n > 1$ единственным образом, с точностью до перестановки сомножителей, разложимо в произведение простых чисел:*

$$n = p_1 p_2 \dots p_k$$

*(все $p_j$ – простые числа)*

Существование такого разложения можно доказать методом спуска, основанным на вполне упорядоченности натуральных чисел. Если данное натуральное число $n > 1$ не разложимо в произведение меньших натуральных чисел, то оно простое, и доказывать нечего. Иначе, $n = mk$, где $m, k < n$. Если $m$ и $k$ – простые, то мы уже получили разложение в произведение простых чисел. В противном случае раскладываем $m$ и/или $k$ далее в произведение меньших чисел. Этот процесс обязательно заканчивается на некотором шаге ввиду вполне упорядоченности $\mathbb{N}$ (по-другому, ввиду конечности натуральных чисел от 2 до $n$), и мы получаем требуемое разложение. Единственность разложения в произведение простых чисел – более тонкое свойство, и вытекает оно из следующей леммы: *если простое число $p$ делит произведение $m \cdot k$, то оно делит один из сомножителей $m$ или $k$* (см. задачи 1.11,1.12.

**Принцип математической индукции (ПМИ)**. *Если в серии утверждений УТВ1, УТВ2, ... известно, что УТВ1 верно (*база индукции*) и для любого $n$ из справедливости УТВ($n$) следует справедливость УТВ($n+1$) (*индукционный переход*), то все утверждения УТВ($n$) истинны.*

Действительно, если предположить, что существует ложное утверждение, то существует и наименьший номер $k$ такой, что УТВ($k$) ложно. В силу базового утверждения индукции, получаем $k \neq 1$ и тогда $k = m + 1$ для некоторого натурального числа $m$. Утверждение УТВ($m$) истинно ввиду минимальности $k$. Тогда получаем противоречие с индукционным переходом в шаге от $m$ до $m+1$. Противоречие показывает, что таких номеров $k$, для которых УТВ($k$) ложно, нет.

Докажем **неравенство Бернулли,** пользуясь ПМИ: *если число $\delta \geq -1$ фиксировано, то для любого натурального $n$ верно неравенство*

$$(1+\delta)^n \geq 1 + n\delta \tag{1.2}$$

Проводим индукцию по $n$. База индукции, случай $n = 1$, тривиальным образом выполняется. Предположим, что неравенство верно для $n$. Тогда

$$(1+\delta)^{n+1} \geq (1+n\delta)(1+\delta) = 1+(n+1)\delta+n\delta^2 \geq 1+(n+1)\delta,$$

что и доказывает справедливость (1.2) для всех натуральных чисел $n$.

**I.2. Немного комбинаторики.** Можно строить математические объекты по индукции (или, иначе, – рекурсивно). Например, определим *факториал неотрицательного целого числа*:

$$0! = 1; \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Получаем $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ – произведение натуральных чисел от 1 до $n$ включительно. Факториал $n$ – это число способов размещения n разных объектов по n ячейкам. Факториал – быстро растущая функция натурального аргумента (Таблица 1):

*Таблица 1*

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n!$ | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 | 40320 | ... |

Другая знаменитая числовая последовательность – *биномиальные коэффициенты*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}; \quad (0 \leq k \leq n)$$

– число способов выбора $k$ предметов из $n$ разных предметов. Биномиальные коэффициенты обладают определенной симметрией: $C_n^k = C_n^{n-k}$, которая вытекает и из комбинаторного смысла: выбирая $k$ предметов из $n$ предметов мы автоматически "выбираем" и оставшиеся предметы, количество которых $n-k$. Название свое биномиальные коэффициенты получили в связи с формулой *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n, \quad (1.3)$$

Биномиальные коэффициенты удовлетворяют рекуррентному соотношению и начальным условиям

$$C_{n+1}^{k} = C_n^k + C_n^{k-1}; \quad C_n^0 = C_n^n = 1$$

и, в силу этого, образуют треугольник Паскаля (Таблица 2).

*Таблица 2*

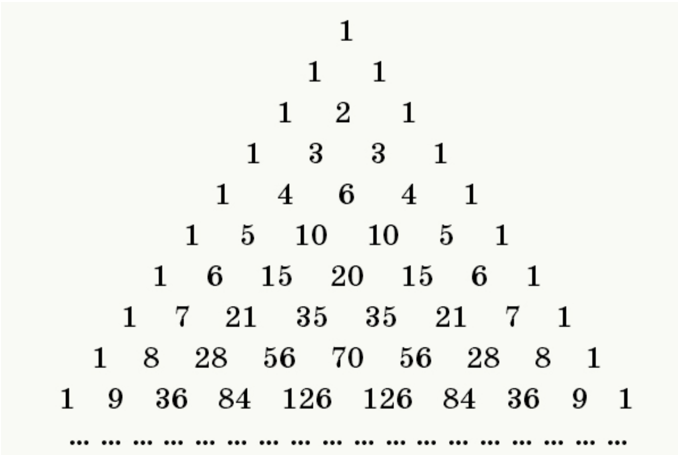



Рис. 1: Треугольник Паскаля

Здесь каждое число в строке, кроме крайних, равно сумме двух чисел, стоящих над ним.

*Целые числа* $\mathbb{Z}$ составляют множество $\{0; \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$. Добавляется к системе натуральных чисел операция вычитания $n-m$, по определению считаем $m + (n - m) = n$. Линейный порядок продолжается на $\mathbb{Z}$, но свойство вполне упорядоченности теряется. Например, отрицательные целые числа $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ не имеют наименьшего элемента.

**I.3. Рациональные числа.** Уравнение $ax = b$ $(a \neq 0)$ разрешимо в кольце целых чисел только, если $a \mid b$. Требуется новое расширение уже кольца $\mathbb{Z}$. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ состоит из всех дробей $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, причем $n \neq 0$. Две дроби $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ считаются равными, если и только, если $m_1n_2 = m_2n_1$, откуда следует правило сокращения дроби на общий множитель числителя и знаменателя. Напомним определение операций сложения, вычитания, умножения, деления

$$\frac{m_1}{n_1} \pm \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 \pm m_2 n_1}{n_1 n_2};$$

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}; \qquad \frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2}{n_1 m_2} \ \ (m_2 \neq 0).$$

Напомним также, как задается порядок на множестве дробей:

$$\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} > 0; \quad \frac{m}{n} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad mn > 0.$$

## I.4. Алгебраические системы

*Алгебраической системой* называется множество, наделенное операциями (например: сложение, умножение, унарный минус, обращение, сопряжение и т.п.), которые подчиняются определенным аксиомам, выраженным в виде тождеств. Основные алгебраические тождества, связанные с бинарными операциями сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$, которым подчиняются числа и многие другие математические объекты, таковы:

**(ассоциативность)** $x + (y + z) = (x + y) + z$; $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;

**(коммутативность)** $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$;

**(дистрибутивность)** $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$; $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;

**(нейтральность нуля)** $0 + x = x$;

**(нейтральность единицы)** $1 \cdot x = x$;

**(противоположность)** $x + (-x) = 0$;

**(обратимость)** $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$ $(x \neq 0)$.

Натуральные числа удовлетворяют первым трем тождествам, целые числа удовлетворяют всем тождествам, кроме последнего. Именно по этой причине $\mathbb{Z}$ называют *кольцом*. Рациональные числа и, как мы увидим, действительные числа удовлетворяют всем перечисленным выше тождествам; поэтому их называют *полями*.

## I.5. Действительные числа.

Не всякое квадратное уравнение разрешимо в поле рациональных чисел. Например, уравнение $x^2 = 2$ не разрешимо в $\mathbb{Q}$, несмотря на то, что отрезок длины $\sqrt{2}$ можно построить на числовой оси, исходя из единичного отрезка, с помощью циркуля и линейки.

Докажем неразрешимость уравнения $x^2 = 2$ в рациональных числах, т.е. докажем несоизмеримость гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника со своим катетом, методом "от противного". Он состоит в следующем: доказывая некоторое утверждение $\mathcal{A}$, мы в начале предполагаем, что верно отрицание $\mathcal{A}$. Выводим из этого предположения разнообразные суждения. Если в результате этого мы получаем противоречивое следствие (т.е. суждение вида: одновременно верно $\mathcal{B}$ и отрицание $\mathcal{B}$), то первоначальное предположение "отрицание $\mathcal{A}$" неверно, следовательно верно отрицание отрицания $\mathcal{A}$, а это тоже самое, что утверждать $\mathcal{A}$.

Итак, предположим противное: найдется дробь $\frac{m}{n}$ такая, что $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Можно считать дробь $\frac{m}{n}$ несократимой. Последнее равенство влечет $m^2 = 2n^2$, откуда $2 \mid m$ по основной теореме арифметики, т.е. $m = 2m'$. Следовательно, $4m'^2 = 2n^2$ или $n^2 = 2m'^2$. Отсюда следует $2|n$. Получаем, что дробь $\frac{m}{n}$ сократима на двойку, что противоречит первоначальному выбору этой дроби. Противоречие показывает, что наше предположение было неверным, следовательно такой дроби $m/n$ не существует.

*Действительное или вещественное число* – это бесконечная десятичная дробь (кратко: б.д.д.), снабженная знаком плюс или минус (знак плюс часто опускаем):

$$r = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots$$

(все $a_j$ цифры). Совокупность всех таких дробей обозначим $\mathbb{R}$. Конечную десятичную дробь

$$r_m = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} = \sum_{j=-m}^{n} a_j 10^j$$

назовем приближением $r$ с точностью до $10^{-m}$. Например,

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242097 \dots ; (\sqrt{2})_2 = 1.41;$$

$$\sqrt{3} = 1.7320508075688772935274463415059 \dots ; (\sqrt{3})_3 = 1.732;$$

и $\sqrt{2} - (\sqrt{2})_2 < 10^{-2}$, $\sqrt{3} - (\sqrt{3})_3 < 10^{-4} < 10^{-3}$.

Положительные действительные числа служат для из измерения длин отрезков. Если выбран отрезок, которому приписана длина 1 (т.е. выбрана единица масштаба), то каждому положительному числу $r$ соответствует отрезок длины $r$ и, наоборот, каждый отрезок (не равный точке) имеет длину, выражающуюся в виде положительного действительного числа.

Каждое действительное число следует воспринимать либо как предел конечных десятичных дробей ($r = \lim r_m$), либо как сумму ряда

$$r = \pm \left(10^n a_n + \cdots + 10a_1 + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{100} + \frac{a_{-3}}{1000} + \cdots \right),$$

что по сути то же самое. Складываются и умножаются действительные числа так:

$$r + s = \lim_{m\to\infty}(r_m + s_m); \quad r \cdot s = \lim_{m\to\infty} r_m \cdot s_m \tag{1.4}$$

Под пределом здесь понимается стабилизация десятичных знаков в б.д.д. $r+s$ и $r\cdot s$. Например, для суммы $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ стабилизация первого десятичного знака происходит сразу, второго и третьего – с момента сложения приближений третьего порядка и т.д., что видно из подсчетов:

$$(\sqrt{2})_2 + (\sqrt{3})_2 = 3.14;\ (\sqrt{2})_3 + (\sqrt{3})_3 = 3.146;\ (\sqrt{2})_4 + (\sqrt{3})_4 = 3,1462$$

Для умножения $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ стабилизация "запаздывает", но все равно имеет место:

$$(\sqrt{2})_2 \cdot (\sqrt{3})_2 = 2.4393;\ (\sqrt{2})_3 \cdot (\sqrt{3})_3 = 2.449048;\ (\sqrt{2})_4 \cdot (\sqrt{3})_4 = 2,4493944$$

Здесь употреблена краткая запись периодической б.д.д. Например, 0.(3) означает б.д.д. $0.333\ldots$ и т.п. Любая рациональная дробь представима в виде бесконечной (периодической) десятичной дроби: $\frac{1}{2} = 0.5(0)$,

$$\frac{1}{3} = 0.(3);\ \frac{1}{4} = 0.(25);\ \frac{1}{6} = 0.1(6);\ \frac{1}{7} = 0.(142857);\ \frac{1}{8} = 0.125;\ \frac{1}{9} = 0.(1).$$

Рациональные числа и только они записываются в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Порядок на множестве бесконечных десятичных дробей лексикографический:

$$r < s \quad \Leftrightarrow \quad (\exists m)\ r_m < s_m.$$

Но это правило работает лишь, если у б.д. д. $r, s$ нет бесконечного хвоста девяток. Действительно, докажем, что $1 = 1.(0) = 0.(9)$:

$$10 \cdot 0.(9) = 9.(9) = 9 + 0.(9) \ \Rightarrow \ 10 \cdot 0.(9) - 0.(9) = 9 \ \Rightarrow \ 9 \cdot 0.(9) = 9,$$

откуда $0.(9) = 1$.

**Теорема 1.1** (см. [3]). *Множество $\mathbb{R}$ бесконечных десятичных дробей дробей с знаком $\pm$ относительно операций (1.4) образует упорядоченное поле, содержащее $\mathbb{Q}$ как подполе. Линейный порядок $\leq$ подчиняется следующим двум правилам*

**(согласованность с сложением)** $x \leq y \ \Rightarrow \ x + z \leq y + z$*;*

**(согласованность с умножением )** $x \leq y$ *и* $z \geq 0$ *влечет* $xz \leq yz$*.*

Таким образом получаем линейно упорядоченное *поле действительных чисел* $\mathbb{R}$ в результате процедуры пополнения поля $\mathbb{Q}$ всеми не периодическими б.д.д. Рациональные точки на числовой прямой расположены плотно, т.е. любой интервал сколь угодно малый по длине, содержит рациональные точки, причем в бесконечном количестве. Действительно, если $r < s$ для двух б.д.д. и n-ый десятичный знак у $r$ меньше n-го десятичного знака числа $s$, то любая конечная (а поэтому рациональная) десятичная дробь вида $r_n + 10^{-n-1} \cdot 0.d_1 d_2 \ldots d_k$ (все $d_j$ цифры, но не все равные 0) лежит между $r$ и $s$.

### I.6. Полнота поля действительных чисел.

Геометрически полнота числовой прямой (определение см. в начале второй лекции) заключается в том, что в ней нет "дыр". Если на плоскости взять две точки по разные стороны числовой прямой и соединить их кривой, не отрывая карандаша от бумаги, то эта кривая обязательно пересечет числовую прямую. Строгая форма этого утверждения имеет вид принципа вложенных отрезков Кантора и/или теоремы о точной верхней грани.

Отрезок $[a; b]$ с $a \leq b$ понимается как множество чисел $x$ таких, что $a \leq x \leq b$. Числа $a, b$ называются концами этого отрезка. Считаем $[b; a] = [a; b]$. Множества $[a; b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, $(a; b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ называются *полуинтервалами.*

Если $A$ – подмножество л.у. множества $R$, то *верхней гранью* (или *верхней границей*) подмножества $A$ называется элемент $r \in R$ такой, что $x \leq r$ для любого $x \in A$. Если верхней грани подмножество $A$ не имеет, то оно называется *неограниченным сверху*, а если найдется хотя бы одна верхняя грань, то $A$ – *ограничено сверху*. Аналогично определяется *нижняя грань* (граница), *ограниченные и неограниченные снизу* подмножества. *Наименьшей верхней гранью* подмножества $A$ (обозначается: $\sup A$ – *супремум*) называется наименьшая из верхних граней. *Наибольшей нижней гранью* подмножества $A$ называется наибольшая из всех нижних границ (обозначается: $\inf A$ – инфинум). Заметим, что не всегда в поле рациональных чисел ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань. Например, множество $A = \left\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\right\}$ ограничено сверху, так как $2^2 > 2 \;\; \Rightarrow \;\; 2 > q$ для любого $q \in A$, но оно не имеет точной верхней грани в множестве $\mathbb{Q}$ именно по причине того, что $\sqrt{2}$ иррациональное число. В то же время в поле действительных чисел наименьшая верхняя грань множества $A$ существует и равна $\sqrt{2}$, несмотря на то, что множество $A$ не имеет наибольшего элемента.

**Теорема 1.2.** *Любое непустое ограниченное сверху подмножество множества действительных чисел имеет в $\mathbb{R}$ наименьшую верхнюю грань. Аналогично, любое непустое ограниченное снизу подмножество множества $\mathbb{R}$ имеет наибольшую нижнюю грань.*

Обоснуем существование супремума ограниченного и непустого множества $A$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ полуинтервалы $(10^{-n}m; 10^{-n}(m+1)]$, если $m$ пробегает множество целых чисел, разбивают числовую ось, т.е. для любого $r \in \mathbb{R}$ найдется ровно одно значение $m$ такое, что $10^{-n}m < r \leq 10^{-n}(m+1)$. Следовательно, существует наибольший интервал $I_n := (10^{-n}m_n; 10^{-n}(m_n+1)]$ ($m$ зависит on $n$), имеющий непустое пересечение с $A$ (пользуемся ограниченностью сверху множесcтва $A$). Обозначим $q_n = 10^{-n}m_n$. Тогда $r = \lim_{n\to\infty} q_n$ будет искомым супремумом. (Предел понимается как стабилизация десятичных знаков: при переходе от $q_n$ к $q_{n+1}$ появляется еще один, последний десятичный знак; например переход от полуинтервала $\left(\frac{1293}{10000}; \frac{1294}{10000}\right]$ к полинтервалу $\left(\frac{12935}{100000}; \frac{12946}{100000}\right]$ лежащему в предыдущем и короче его в десять раз, позволяет уточнить пятый десятичный знак супремума. ) Действительно, если бы существовало число $a \in A$, превосходящее $r$, то взяв интервал $I_n$ длиной меньшем, чем $a - r$, получили бы $10^{-n}(m_n+1) < a$ – вопреки правилу выбора этого интервала. С другой стороны, если $b < r$, то также можно взять интервал $I_n$ длиной меньшем, чем $r-b$. В нем имеется точка $a\in A$ согласно выбору $I_n$ и для нее верна оценка $b<10^{-n}m_n<a$, откуда следует, что $b$ не является верхней гранью множества $A$.

Отличие (и преимущество) поля действительных чисел от поля рациональных чисел как раз состоит в полноте первого, что можно выразить и по другому

**Теорема 1.3** (принцип Кантора). *Любая система вложенных друг в друга отрезков имеет непустое пересечение в поле* $\mathbb{R}$*:*

$$[a_1;b_1]\supseteq[a_2;b_2]\supseteq[a_3;b_3]\supseteq\cdots\ \Rightarrow\ \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n;b_n]\neq\emptyset.$$

Действительно, легко видеть, что $a_n\le\sup\{a_k\mid k\in\mathbb{N}\}\le m$ для любых натуральных $n,m$, откуда и следует непустота пересечения отрезков $[a_n;b_n]$.

Именно полнотой поля $\mathbb{R}$ мы пользуемся, извлекая корень из положительного числа $s$. Если найдена конечная десятичная дробь $a_n$ такая, что $a_n^2<s<(a_n+10^{-n})^2$, то заведомо найдется цифра $h$, для которой $(a_n+h\cdot10^{-n-1})^2\le s<(a_n+(h+1)10^{-n-1})^2$. Таким образом, либо $(a_n+h\cdot10^{-n-1})^2=s$ на каком-то шаге, либо, обозначив $b_n=a_n+10^{-n}$, получаем систему вложенных друг в друга отрезков $[a_n,b_n]$, каждый последующий из которых в десять раз короче предыдущего и которые согласно принципу Кантора имеют общую точку $a$, очевидно единственную. Неравенства $a^2<s$ и $a^2>s$ приводят к противоречию, ибо сколь угодно близко к $a$ находятся как точки $a_n$ с условием $a_n^2<s$, так и точки $b_n$ с условием $b_n^2>s$. Остается единственный случай $a^2=s$. В этих рассуждениях мы неявно апеллировали к свойствам предела последовательности, которые далее будут доказаны далее в лекции 12.

## I.7. Принцип Архимеда

Для поля действительных чисел, впрочем и для поля рациональных чисел, справедлив другой важный принцип Архимеда: *для любого сколь угодно малого $b>0$ и для любого $d\in\mathbb{R}$ найдется натуральное число $n$ такое, что $nb>d$.*

Действительно, если бы множество $A=\{nb\mid n\in\mathbb{N}\}$ целиком лежало левее $d$, т.е. $nb\le d$ для любого $n\in\mathbb{N}$, то множество $A$ было бы ограничено сверху и для него существовала бы наименьшая верхняя грань $r$. Так как $r - b < r$, то $r - b$ Следовательно, $r - b$ не будет верхней гранью и поэтому существует $nb > r - b$, откуда $(n + 1)b > r$. Получено противоречие с тем, что $r$ – верхняя грань множества $A$ для которой выполняется неаравенство $r \geq (n + 1)b$. Противоречие показавает, что множество $A$ не ограничено сверху, т.е. существует $n \in \mathbb{N}$ для которого $nb$ превзойдет любое наперед заданное число $d$.

Получим несколько следствий из принципа Архимеда.

**А.** *Для любого $c > 1$ и для любого $d \in \mathbb{R}$ найдется натуральное число $n$ такое, что $c^n > d$.*

Действительно, если записать $c = 1 + \delta$ для $\delta = c - 1 > 0$, то число $c^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta$ (неравенства Бернулли) может быть сделано сколь угодно большим.

**Б.** *Для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ найдется номер $n$, для которого $1/n < \varepsilon$*

В самом деле, взяв $b = 1$ и $d = 1/\varepsilon$ в принципе Архимеда, найдем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > 1/\varepsilon$, откуда $\varepsilon < 1/n$.

**В.** *Для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ и любого $0 < \delta < 1$ найдется номер $n$, для которого $\delta^n < \varepsilon$.*

Для доказательства этого утверждения следует применить следствие А, положив в нем $c = 1/\delta$ и $d = 1/\varepsilon$.

### I.8. Абсолютная величина и знак числа

*Абсолютная величина числа* или, иначе, *модуль числа* $x$ есть $x$, если $x \geq 0$, и есть $-x$, если $x < 0$. Иными словами, $|x| = \max\{x, -x\}$. *Функция знака* определяется так:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

и совпадет с $\frac{|x|}{x}$. Эти функции обладают свойствами:

$$|x| \geq 0; \quad |x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0;$$

$$|xy| = |x|\,|y|\,;$$
$$|x+y| \le |x| + |y| \;\; \text{(неравенство треугольника)};$$
$$|x-y| \ge \big||x| - |y|\big|\,;$$
$$\operatorname{sgn}(x_1x_2) = \operatorname{sgn}(x_1)\cdot\operatorname{sgn}(x_2).$$

На числовой прямой (определение см. в начале Лекции 2) расстояние между точками $P$ и $Q$, т.е. длина отрезка $PQ$, равно модулю разности их координат:

$$d(P;Q) = |x_P - x_Q|$$

Тем самым $|x|$ есть расстояние от точки $P$ с координатой $x$ до начала координат. Это можно считать геометрическим смыслом модуля числа.

## I.9. Расширенная область действительных чисел

Присоединим к полю действительных чисел два элемента – $+\infty$ и $-\infty$, полагая, что для всех $x \in \mathbb{R}$ верны соотношения

$$-\infty < x < +\infty, \quad x + (\pm\infty) = \pm\infty, \quad \frac{x}{\pm\infty} = 0.$$

Для всех положительных $x$ будем считать, что

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,$$

а для отрицательных $x$ считаем

$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty,$$

Полагаем также

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,\; (\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty,\; (\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty.$$

Таким образом, неопределенными остаются операции:

$$\left[\frac{0}{0},\; \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\; +\infty - \infty,\; 0\cdot(\pm\infty)\right].$$

Это так называемые неопределенности, которые нам предстоит раскрывать при вычислении пределов. Вещественные числа вместе с $\pm\infty$ образуют *расширенную числовую прямую.* Можно убедиться, что основные арифметические правила (ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность) остаются верными и для расширенной системы чисел, при условии определенности всех входящих операций.

## I.10. Задачи

**1.4.** Найти наименьшее натуральное число такое, что а) $n^2 + n \geq 100$, б) $2^{n-1} > n^2$.

**1.5.** Решить уравнение $2^n = n^2$ в натуральных числах. Построить графики функций $y = 2^x$, $y = x^2$; сколько пересечений у этих графиков?

**1.6.** Доказать признаки делимости; если $n$ имеет вид (1.1), то

а) $3 \mid n \quad \Leftrightarrow \quad 3 \mid a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$.

б) $9 \mid n \quad \Leftrightarrow \quad 9 \mid a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$.

в) $11 \mid n \quad \Leftrightarrow \quad 11 \mid a_n - a_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}a_1 + (-1)^n a_0$.

**1.7.** Найти остаток от деления $5^{19} + 2^{100}$ а) на 3; б) на 5; в) на 7.

**1.8.** Доказать, что а) $2 \mid n^2 + n$; б) $30 \mid n^5 - n$ для любого натурального $n$

**1.9.** Разложить а) 111111111; б) 123456789 в произведение простых множителей.

**1.10.** Если $a, b \in \mathbb{Z}$ взаимно просты, т.е. не имеют общего делителя, большего единицы, то найдутся $s, t \in \mathbb{Z}$ с условием $as + bt = 1$.

*Доказательство.* Пусть $d$ – наименьшее натуральное число, представимое в виде $as + bt$. Поделим $a$ на $d$ с остатком: $a = dq + r$, $0 \leq r < d$. Так как $d = as + bt$ (*), то

$$r = a - dq = a - (as + bt)q = a(1 - sq) + b(-tq).$$

В силу минимальности $d$, получаем $r = 0$, т.е. $d \mid a$. Аналогично, $d \mid b$. Тогда $d = 1$ в виду взаимной простоты чисел $a, b$. Подставляя $d = 1$ в (*), завершаем доказательство. $\square$

Как следствие, получаем:

**1.11.** если $p \mid ab$ для некоторого простого числа $p$, то либо $p \mid a$, либо $p \mid b$

В самом деле, если $ab = ph$ и $p$ не делит $a$, то $a$ и $p$ взаимно просты, и $1 = px + ay$ для некоторых целых $x, y$ согласно задаче 1.10. Тогда $b = b(px + ay) = pbx + phy$ делится на $p$.

Из этого утверждения легко следует единственность разложения в произведение простых чисел. Действительно, если $p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_m$ (*), где все числа $p_i, q_j$ – простые, то $p_1$ должно делить одно из чисел $q_1, q_2, \dots, q_m$ согласно следствию. Так как все $q_j$ простые, то $p_1$ совпадает с $q_j$ для какого-либо индекса $j$. Сокращая (*) на $p_1$ и применяя индукцию по $n$, завершаем доказательство единственности разложения на простые множители.

**1.12.** Обосновать ПМИ в несколько другой форме:

> *если первое из утверждений $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots$ (*) верно, и для любого натурального $t > 1$ из справедливости $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{t-1}$ вытекает истинность $\mathcal{A}_t$, то все утверждения (*) верны.*

Докажем существование разложения натурального числа $n > 1$ в произведение простых чисел с помощью этого модифицированного принципа математической индукции. Если число $n > 1$ простое, то $n = n$ и есть искомое разложение. Предполагая, что число $n$ составное, т.е. $n = mk$, где $m, k < n$, и для меньших чисел разложение в произведение простых установлено, то раскладывая $m$ и $k$ в произведение простых и перемножая эти разложения, получим искомое разложение числа $n$.

**1.13.** С помощью банок в 5 и 7 литров и неограниченного количества воды отмерить один литр воды. А если банки имеют ёмкость 11 и 13 литров?

**1.14.** Написать программу, которая по двум целым числам $a, b$ проверяет, что они взаимно просты и возвращает числа $s, t$ с условием $as + bt = 1$.

**1.15.** Применить ПМИ и доказать следующие тождества

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q};$$

**1.16.** Назовем дробь вида $\frac{m}{p^k}$, где $p$ – простое, а $1 \le m < p$ *простейшей.* Разложить $\frac{63}{100}$ в арифметическую сумму простейших дробей.

**1.17.** Определим операцию $\frac{m_1}{n_1} \oplus \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ над дробями с натуральными $m_j, n_j$. Доказать, что если $m_1/n_1 \le m_2/n_2$, то

$$\frac{m_1}{n_1} \le \frac{m_1}{n_1} \oplus \frac{m_2}{n_2} \le \frac{m_2}{n_2}.$$

**1.18.** Разложить рациональные дроби $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{6}{7}$ в бесконечную периодическую десятичную дробь. Наоборот, записать $0.(21)$ в виде рациональной дроби.

**1.19.** Сколько разных слов можно составить переставляя буквы в слове а) КАРТОН; б) БАОБАБ; в) МОЛОКО.

**1.20.** а) Сколькими способами можно выбрать делегацию четырех представителей из группы, состоящей из двадцати пяти человек?

б) Назовем строку из восьми единиц правдой, а из восьми нулей – ложью. Сколько "полуправд" , строк, в которых четыре единицы и четыре нуля?

**1.21.** Доказать рекуррентное соотношение $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ для биномиальных коэффициентов. Обосновать начальные условия $C_n^0 = C_n^n = 1$, исходя из комбинаторного смысла $C_n^k$. Доказать, что рекуррентное соотношение вместе с начальными условиями однозначно характеризуют биномиальные коэффициенты.

**1.22.** Нарисовать на числовой прямой множество точек

$$\{x \mid |6 - x| \le 3\} \cap \{x \mid |x - 1| \ge 4\}.$$

# ЛЕКЦИЯ II
## Декартова система координат

Превратим прямую $\ell$, лежащую на плоскости $\tau$, в числовую ось. Для этого выберем на плоскости какой-либо отрезок $E$, не сводящийся к точке, и будем считать, что его длина равна единице. Отрезок $E$ будет у нас *единицей масштаба*. Далее на прямой $\ell$ отметим точку $O$ – *начало отсчета*, и одно из двух возможных направлений движения по прямой $\ell$ обозначим как *положительное* (поставим там стрелочку), а другое направление будем считать *отрицательным*. Все это задает *ось*; дадим ей наименование – ось $Ox$.

Каждой точке $P$ оси $Ox$ сопоставим действительное число – координату $x_P$ по следующему правилу: если $P$ лежит в положительном направлении от начала $O$ (как правило, это означает, что $P$ лежит правее точки $O$), то $x_P = d(O;P)$ – расстояние от точки $P$ до точки $O$, измеренное с помощью единицы масштаба. Если же точка $P$ лежит в отрицательном направлении от начала $O$, то $x_P = -d(O;P)$ по определению. Число $x_P$ назовем *координатой точки* $P$ на оси $Ox$.

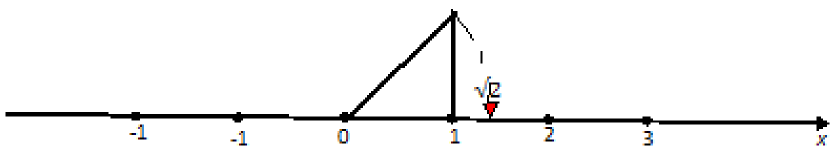



Рис. 2: Числовая ось Ox

**Определение 2.1.** *Числовой осью* называют прямую, на которой выделено одно из двух возможных направлений, называемое положительным, отмечена точка – начала отсчета и указан отрезок – единица масштаба.

На плоскости выберем две взаимно перпендикулярные оси $Ox$ и $Oy$ с общим началом $O$ и общей единицей масштаба. Всё это называется *декартовой системой координат на плоскости.* Вектора $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ сонаправлены с осями $Ox$ и $Oy$ соответственно (см.рис. 3). Каждая точка получает пару декартовых координат $P \to (x_P; y_P)$. А именно, $x_P$ – координата проекции точки $P$ на ось $Ox$, а $y_P$ – координата проекции точки $P$ на ось $Oy$. Наоборот, любая пара чисел служит координатами единственной точки на декартовой плоскости. Соответствие между точками и их координатами столь значимо и столь часто используется, что мы, допуская вольность, говорим о точке $(2; -5)$, подразумевая точку декартовой плоскости с координатами $x = 2$ и $y = -5$; говорим о прямой $x + y = 1$, подразумевая множество точек на декартовой плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению и т. д.

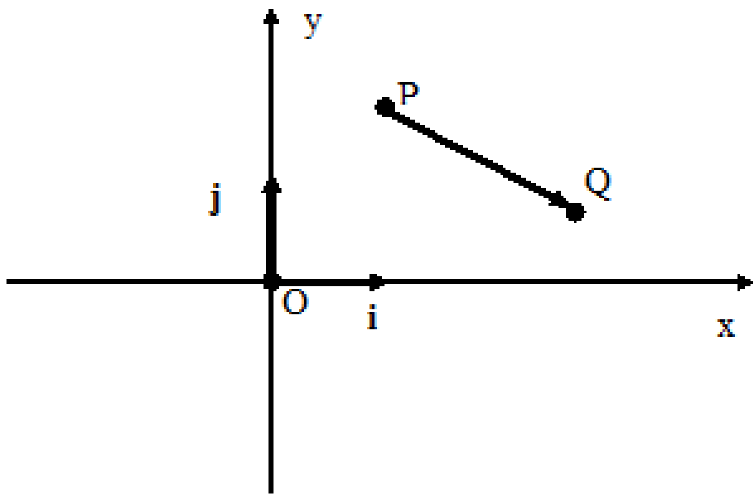



Рис. 3: Декартова система координат на плоскости

Расстояние между точками в декартовой системе координат задается формулой

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}. \tag{2.1}$$

**Принцип Декарта**: любое уравнение вида $F(x, y) = 0$ задает кривую на декартовой плоскости, состоящую из всех точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Именно так и определяется *график функции* $y = f(x)$ как множество точек $\{P(a, f(a)) \mid a \in \text{ОДЗ}(f)\}$. Наоборот, кривые на плоскости (прямые, окружности, эллипсы, гиперболы, параболы и т.д.), определяемые в геометрических терминах, т.е. как геометрическое место точек (ГМТ), задаются аналитически уравнением вида $F(x, y) = 0$.

Например, прямые на плоскости задаются уравнением $Ax + By + C = 0$, где числа $A, B$ одновременно не равны 0. Окружность радиуса $R$ с центром в точке $(a, b)$ задается уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Области на плоскости задаются либо одним неравенством вида $F(x, y) \geq 0$, либо системой таких неравенств. Например, неравенство вида $Ax+By+C \geq 0$, где $(A, B) \neq (0; 0)$, задает полуплоскость, и каждая полуплоскость задается таким неравенством. Круг радиуса $R$ с центром в точке $Q(x_0, y_0)$ задается неравенством $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$.

Перечислим простейшие соответствия между геометрическими преобразованиями графика функции и аналитическими преобразованиями формулы, задающей функцию (Таблица 3).

*Таблица 3*

| Изменение функции $f(x)$ | Преобразование графика функции |
|---|---|
| $f(x) + A$ | Сдвиг на $A$ по оси $Oy$ |
| $f(x - a)$ | Сдвиг на $a$ по оси $Ox$ |
| $-f(x)$ | Отражение относительно оси $Ox$ |
| $kf(x)$, $k > 0$ | Растяжение ($k > 1$) или сжатие ($k < 1$) по оси $Oy$ |
| $\lvert f(x)\rvert$ | Отражение относительно оси $Ox$ тех частей графика, которые лежат ниже оси $Ox$ |

## II.1. Преобразование системы координат

Рассмотрим случай параллельного переноса и поворота декартовой системы координат на плоскости (см. рис. 4).

Ясно, что при параллельном переносе, когда новое начало координат – точка $O'$ имеет координаты $(a, b)$ в системе координат $Oxy$, соответствие "новых" координат $u, v$ и "старых" координат $x, y$ таково

$$\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases} ; \quad \begin{cases} u = x - a \\ v = y - b \end{cases}$$

В случае поворота на угол $\alpha$ единичные вектора новой системы координат имеют вид $\mathbf{i}' = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \sin\alpha\,\mathbf{j}$, $\mathbf{j}' = -\sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}$. Подставляя это в разложение $\overrightarrow{OP} = u\mathbf{i}' + v\mathbf{j}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ и приравнивая координаты при векторах $\mathbf{i}, \mathbf{j}$,

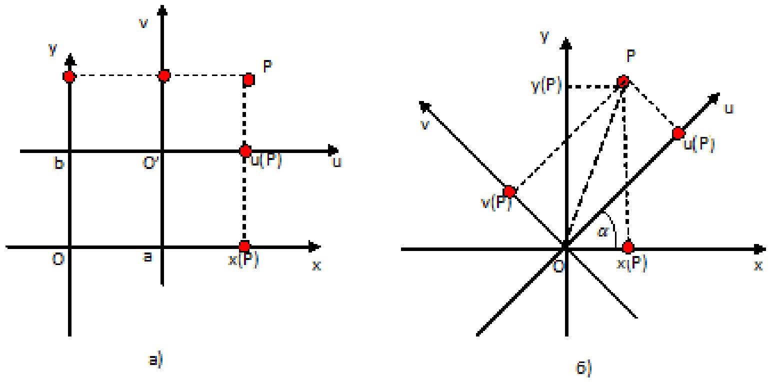



Рис. 4: Параллельный перенос и поворот СК

получим:

$$\begin{cases} x = \cos\alpha\, u - \sin\alpha\, v \\ y = \sin\alpha\, u + \cos\alpha\, v \end{cases} ; \quad \begin{cases} u = \cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y \\ v = -\sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y \end{cases} \tag{2.2}$$

(второе соотношение получено из первого заменой $\alpha$ на $-\alpha$ и переменой местами новых и старых координат)

## II.2. Полярная система координат

Наряду с декартовыми координатами $(x, y)$ произвольной точки $P$, взятой на декартовой плоскости $Oxy$, существуют и часто используются и полярные координаты $(r, \varphi)$ этой точки. Первая координата $r$ есть расстояние $d(P, O)$, а вторая координата $\varphi$ есть угол между вектором $\overrightarrow{OP}$ и осью $Ox$. Связь декартовых и полярных координат следующая

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{2.3}$$

Если $P$ совпадает с началом координат, то угол $\varphi$ неопределен.

Например, уравнение окружности радиуса $R$ с центром в начале координат в полярных координатах выглядит совсем просто: $r = R$. Луч под углом $\Phi$ к оси $Ox$ задается также значительно проще в полярных координатах: $\varphi = \Phi$

## II.3. Задачи

**2.2.** Найти новые координаты точки $P(-5;7)$, если систему координат перенесли в точку $O'(2;-3)$ а затем повернули на $30^0$.

**2.3.** Написать уравнение срединного перпендикуляра к отрезку $[A(1;;4), B(5;3)]$.

**2.4.** Написать уравнение ГТМ точек, равноудаленных от точки $A(0;4)$ и от прямой $y=-4$.

**2.5.** Нарисовать на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению а) $|x|+|y|=1$, б) $x^2+y^2=4x$, в) $xy=0$, г) $x^2+y^2+1=0$

**2.6.** Нарисовать графики функций а) $y=\frac{x-1}{x+1}$, б) $y=x^3-4x$, в) $y=|2-|x+3||$, г) $y=\text{sng}(x^3-4x)$.

**2.7.** Нарисовать области на плоскости, заданные неравенствами а) $x^2+y^2\leq 4x$, б) $|x|+|y|\leq 1$, в) $x^2\leq y\leq 2x+6$.

**2.8.** Задать треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(0;5)$ системой трех неравенств.

**2.9.** В уравнении $xy=1$, задающем гиперболу, перейти к новым координатам, повернутым относительно старых $Oxy$ на $45^0$.

**2.10.** В уравнении $y=x^2-4x+7$, задающем параболу, перейти к новым координатам, полученным параллельным переносом в точку $O'(2;3)$.

# ЛЕКЦИЯ III
# Системы линейных уравнений

В этом параграфе дана мотивировка абстрактным понятиям матрицы и определителя квадратной матрицы, которые появятся далее.

## III.1. Одно линейное уравнение

Прежде всего, что означает слово "линейный"? Функция $y(x) = kx$ – линейная ($k \in \mathbb{R}$ – фиксированное число). Под этим подразумевается, что для любых чисел $x_1, x_2$ и $\lambda$ имеют место следующие соотношения

**(Л1)** $y(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2)$;

**(Л2)** $y(\lambda x) = \lambda y(x)$

Общий вид линейного уравнения с одним неизвестным $x$ следующий:

$$ax = b. \tag{3.1}$$

Здесь $a$ и $b$ какие-то действительные числа, называемые *коэффициентами*. Мы ищем все решения уравнения (3.1), т.е. такие числа, при подстановке которых вместо $x$ получается слева в (3.1) то же число, что и справа. Сформулируем ответ.

*Случай 1:* $a \neq 0$. Тогда решение единственно и равно $b/a$.

*Случай 2:* $a = 0$, но $b \neq 0$. Тогда решений нет или, как мы будем говорить, *множество решений пусто.*

*Случай 3:* $a = b = 0$. Тогда множество решений – вся числовая ось, т.е. все множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Перейдем к одному уравнению с двумя неизвестными

$$ax + by = c \tag{3.2}$$

*Случай 1:* $b \neq 0$. Тогда уравнение (3.2) эквивалентно функциональной зависимости $y = c/b - (a/b)x$, графиком которой служит наклонная прямая на плоскости.

*Случай 2: $b = 0$, но $a \neq 0$.* Тогда уравнение (3.2) эквивалентно $x = c/a$. Множество точек на декартовой плоскости, удовлетворяющих этому соотношению, – вертикальная прямая.

*Случай 3: $a = b = 0$, но $c \neq 0$.* Тогда решений нет.

*Случай 4: $a = b = c = 0$.* Тогда все пары чисел являются решениями.

### III.2. Система линейных уравнений $2 \times 2$

Перейдем теперь к линейной системе $2 \times 2$ с неизвестными $x$ и $y$. Общий вид её следующий:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} . \tag{3.3}$$

Фигурная скобка слева в (3.3) заменяет союз "и". Нам надо найти все пары чисел $(x_0, y_0)$, при подстановке которых в первое *и* во второе уравнение системы (3.3) получаются верные числовые равенства. Исключим неизвестное $y$ из системы (3.3). Для этого первое уравнение умножим на $b_2$, второе – на $b_1$, и вычтем из полученного первого уравнения получившееся второе уравнение. Далее исключим неизвестное $x$ из системы (3.3), для чего первое уравнение умножим на $a_2$, второе – на $a_1$, и вычтем из полученного второго уравнения первое. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1, \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2. \end{cases} \tag{3.4}$$

Система двух уравнений (3.4) является следствием системы (3.3). Это значит, что равенства (3.4) верны, коль скоро пара $(x, y)$ есть решение системы (3.3). Если внимательно присмотреться к коэффициентам системы (3.4), то можно заметить, что все они составлены по одному и тому же правилу. Назовём следующую конструкцию

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2$-матрицей с коэффициентами $a_1, b_1, a_2, b_2$, а число $a_1b_2 - a_2b_1$ назовем ее *определителем* и будем записывать так:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} . \tag{3.5}$$

Более точно, определитель (3.5) называют *определителем системы* (3.3). Будем обозначать этот определитель прописной греческой буквой $\Delta$ ("дельта"). Правые части уравнений (3.4) также являются определителями, но уже других матриц. Обозначим их следующим образом:

$$\Delta_x = c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_y = c_2a_1 - c_1a_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, следствием системы (3.3) является "распадающаяся" система
$\Delta \cdot x = \Delta_x$, $\Delta \cdot y = \Delta_y$, которую мы уже знаем, как решать.

*Случай 1*: $\Delta \neq 0$. Тогда система (3.4) имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{3.6}$$

(*формулы Крамара*). Оказывается, что (3.6) *в случае* $\Delta \neq 0$ *есть единственное решение системы* (3.3). Эта формулировка **правила Крамара** для системы $2 \times 2$. Мы сформулировали правило Крамара, но доказали лишь единственность решения (3.6), а сам факт, что (3.6) есть решение системы (3.3) установить можно прямой проверкой:

$$a_1x + b_1y = a_1\frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1\frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(a_1(c_1b_2 - c_2b_1) + b_1(c_2a_1 - c_1a_2)) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}(a_1c_1b_2 - b_1c_1a_2) = \frac{1}{\Delta}(a_1b_2 - b_1a_2)c_1 = c_1$$

Аналогично проверяется, что пара чисел $(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta})$ является решением и второго уравнения системы (3.3).

*Случай 2*: $\Delta = 0$, но либо $\Delta_x \neq 0$, либо $\Delta_y \neq 0$. Тогда одно из уравнений системы (3.4) не имеет решения. Отсюда немедленно вытекает, что система (3.3) не имеет решений, так как (3.4) есть следствие системы (3.3).

*Случай 3*: $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. Конечно, в этом случае система (3.4) имеет решениями все пары чисел. Но это не значит, что любая пара чисел является решением исходной системы (3.3). Например, в системе $x+y=0$, $2x+2y=0$ все определители $\Delta$, $\Delta_x$, $\Delta_y$ равны нулю, но решением ее будет биссектриса второго и четвертого квадрантов декартовой плоскости.

Если $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, то второму уравнению удовлетворяет любая пара чисел, так что его без ущерба для множества решений можно выбросить из системы. Но тогда мы возвращаемся в уже исследованный случай одного уравнения с двумя неизвестными. Считаем теперь, что тройка $(a_1, b_1, c_1)$ ненулевая, т.е по крайней мере одна из компонент этой тройки есть ненулевое число. Тогда равенства $\Delta = \Delta_y = \Delta_x = 0$ можно переписать как пропорции:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}. \tag{3.7}$$

Не следует смущаться, если в знаменателе пропорции окажется ноль. По определению пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ имеет место, если накрест лежащие произведения равны: $ad = bc$. Обозначим общее отношение (3.7) греческой буквой $\lambda$ ("лямбда"). Тогда тройка коэффициентов $(a_2, b_2, c_2)$ получается из тройки $(a_1, b_1, c_1)$ умножением на $\lambda$ в том смысле, что $a_2 = \lambda a_1, b_2 = \lambda b_1$ и $c_2 = \lambda c_1$. А это означает, в свою очередь, что, если мы ко второму уравнению системы (3.3) прибавим первое уравнение, предварительно умноженное на $\lambda$, то придем к системе вида

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Система (3.3) в свою очередь может быть получена из системы (3.8) обратным преобразованием: надо ко второму уравнению системы (3.8) прибавить первое, умноженное на $\frac{1}{\lambda}$. (Если бы было $\lambda = 0$, то $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ и мы бы начинали с отбрасывания первого уравнения). Это значит, что системы (3.3) и (3.8) имеют одно и тоже множество решений, или как мы будем говорить, они *эквивалентны*. Понятно, что система (3.8) проще устроена, чем (3.3), и мы будем решать именно ее. Как уже отмечалось, нулевое уравнение можно отбросить, и мы снова возвращаемся к случаю одного уравнения с одним неизвестным.

Мы полностью решили систему $2 \times 2$. Подведем итог. В случае отличия от нуля определителя системы, решение единственно. Если же $\Delta = 0$, то решений может не быть вовсе, либо может быть бесконечное множество решений, образующих прямую на декартовой плоскости $OXY$. В случае равенства нулю всех коэффициентов, множество решений заполняет всю плоскость $OXY$.

Мы не случайно в последнем абзаце прибегли к геометрии. Если есть возможность какой-либо математический объект истолковать геометрически, то этой возможностью надо обязательно воспользоваться. То, что такая возможность есть для системы $2 \times 2$, показывает следующая Таблица 4 (в этой таблице предполагается, что пары коэффициента $(a_1, b_1)$ и $(a_2, b_2)$ ненулевые).

*Таблица 4*

| Аналитический язык | Геометрический язык |
|---|---|
| Пара $(x, y)$ | Точка $P(x, y)$ на плоскости $OXY$ |
| Уравнение $ax + by = c$ $((a; b) \neq (0; 0))$ | Прямая на плоскости $OXY$ |
| Решение системы (3.3) | Поиск пересечения двух прямых – $\ell_1 : \quad a_1x + b_1y = c_1$ и $\ell_2 : \quad a_2x + b_2y = c_2$ |
| Решение системы (3.3) единственно (т.е. $\Delta \neq 0$) | Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ пересекаются |
| Система (3.3) решений не имеет ($\Delta = 0$, но $\Delta_y \neq 0$ либо $\Delta y \neq 0$) | Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ параллельны |
| Система (3.3) имеет бесконечное множество решений | Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ совпадают. |

**III.3. Система линейных уравнений** $3 \times 3$:

Решаем систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{3.9}$$

Обозначим

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_{21} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Умножим первое уравнение системы (3.9) на $\Delta_{11}$, второе – на $-\Delta_{21}$, а третье – на $\Delta_{31}$ и результаты сложим. Получим

$$(a_1\Delta_{11} - a_2\Delta_{21} + a_3\Delta_{31})x + (b_1\Delta_{11} - b_2\Delta_{21} + b_3\Delta_{31})y + \\ +(c_1\Delta_{11} - c_2\Delta_{21} + c_3\Delta_{31})z = (d_1\Delta_{11} - d_2\Delta_{21} + d_3\Delta_{31})$$

Нетрудно вычислить и доказать, что $b_1\Delta_{11} - b_2\Delta_{21} + b_3\Delta_{31} = 0$ и $c_1\Delta_{11} - c_2\Delta_{21} + c_3\Delta_{31} = 0$. С учётом этого остаётся

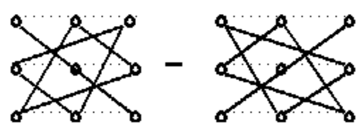
$$(a_1\Delta_{11} - a_2\Delta_{21} + a_3\Delta_{31})x = (d_1\Delta_{11} - d_2\Delta_{21} + d_3\Delta_{31}) \tag{3.10}$$

Обозначим

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

и назовем эту конструкцию *определителем* $3 \times 3$. Конечно, шесть произведений в (3.11) запомнить нелегко. Существует правило, точнее диаграмма, облегчающая это запоминание



В каждом из произведений в правой части (3.11) расставьте сомножители по кружочкам этой диаграммы и ее смысл станет ясен.

Итак, применяя определение определителя $3\times3$, мы можем переписать (3.10) в виде

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

Совершенно аналогично можно получить два других следствия системы (3.9)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \tag{3.13}$$

Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

и назовем *определителем системы* (3.9) и

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Предположим, что $\Delta \neq 0$. Тогда решение этой системы может быть только такое (см. (3.11) и (3.13)):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{3.14}$$

Тот факт, что (3.14) – действительно решение системы (3.9), доказывается прямой проверкой. Мы доказали **правило Крамера для систем** $3 \times 3$. После этого естественно предположить, что существует аналогичное правило и аналогичные формулы (*Крамера*) для квадратных систем любого порядка. Это будет установлено в лекции 5.

**III.4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.**

Пусть имеются две системы уравнений (не обязательно линейных) с одним и тем же набором неизвестных – "новая" и "старая" . Новая система есть *следствие старой*, если всякое решение старой системы одновременно есть решение новой системы. Две таких системы уравнений называются *эквивалентными*, если их множества решений совпадают, иными словами, если каждая из них есть следствие другой.

Решать систему (3.9) будем методом последовательного исключения неизвестных или, иначе, методом Гаусса.

Элементарными преобразованиями линейной системы уравнений называются:

(1 тип) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на какое-либо число;

(2 тип) перестановка двух уравнений;

(3 тип) умножение какого-либо уравнения системы на ненулевое число;

(4 тип) отбрасывание или дописывание нулевого уравнения.

Заметим, что любое элементарное преобразование обратимо, то есть существует элементарное преобразование, применение которого к полученной системе возвращает ее в исходное состояние. Как следствие получаем, что при элементарном преобразовании получается система, эквивалентная исходной.

Процесс элементарных преобразований имеет конечную цель – ступенчатый вид системы. При этом система линейных уравнений имеет ступенчатый вид, если первое ненулевое слагаемое каждого последующего уравнения стоит правее, чем первое ненулевое слагаемое предыдущего уравнения. Любую систему линейных уравнений элементарными преобразованиями 1-го и 2-го типов можно привести к ступенчатому виду. Справедливость этого утверждения обоснуем на примере системы

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 2, а из третьего – первое и второе уравнение, получаем ступенчатый вид:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ \qquad - 5y - z = -6, \\ \qquad\qquad 5z = 5. \end{cases}$$

Неизвестные, стоящие в углах ступенчатого вида (в нашем случае – все) называются главными, остальные (в нашем случае их нет) называются свободными. Далее реализуем «обратный процесс»: начиная с последнего уравнения и продвигаясь шаг за шагом к первому уравнению, выражаем главные неизвестные:

$$z = 5/5 = 1; \quad 5y + 1 = 6 \;\Rightarrow\; y = 1; \quad x + 2 - 1 = 3 \;\Rightarrow\; x = 2$$

Итак, система имеет единственное решение $(2; 1; 1)$. Разберем еще один пример, где встречаются и свободные неизвестные:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + y - 4z = 3. \end{cases}$$

Применяя элементарные преобразования, что и в случае первой системы, а затем отбрасывая получившееся нулевое уравнение, получаем ступенчатый вид:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ \qquad 5y + z = 6, \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

Здесь неизвестные $x, y$ – главные (стоят в углах ступенчатого вида), а неизвестная $z$ свободная, которой можно придать любое значение и выразить главные неизвестные обратным процессом:

$$y = (6 - z)/5; \quad x = 3 - 2y + z = (3 + 7z)/5$$

Ответом следует считать совокупность всех троек $((3+7z)/5; (6-z)/5; z)$, где параметр $z$ пробегает множество действительных чисел. Вид ответа можно улучшить, взяв за параметр переменную $t$ так, что $z = 5t$. Тогда совокупность всех точек в пространстве $Oxyz$ с координатами $(0.6 + 7t; 1.2 - t; 5t)$, образующих прямую, будет ответом.

Если в процессе приведения к ступенчатому виду встретится уравнение вида $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = b$, где $b \neq 0$, то как это уравнение, так и исходная система решений не имеют.

Рассмотрим теперь частный случай *однородной системы*, т.е. случай, когда все коэффициенты в правой части системы равны 0. Такая система заведомо совместна, поскольку строка из нулей является решением. Критерий существования ненулевого решения дает следующая теорема, представляющая из себя непосредственное следствие метода Гаусса.

**Теорема.** *Однородная система имеет ненулевое решение в том и только том случае, когда после приведения к ступенчатому виду число ненулевых уравнений меньше, чем число неизвестных. В частности, это так, если изначальная однородная система имела число уравнений меньше, чем число неизвестных.*

### III.5. Задачи

**3.1.** Докажите, если функция $y(x)$ обладает свойствами (Л1) и (Л2), то она имеет вид $y(x) = kx$ для подходящего $k \in \mathbb{R}$. Какие из следующих функций над $\mathbb{R}$ линейны: а) $y = |x|$, б) $y = x/\pi$, в) $y = e^x$, г) $y = 0$?

**3.2.** Рассмотрим в пространстве $OXYZ$ плоскость $\gamma$, проходящую через точки $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ и $C(0, 0, 1)$. Приведите пример системы $2 \times 3$ с множеством решений, заполняющих плоскость $\gamma$.

**3.3.** Может ли СЛАУ иметь конечное, но не единичное множество решений?

**3.4.** Задать прямую $x = 2t - 1; y = 3t - 5; z = 7t + 1$ в виде системы двух уравнений

**3.5.** Доказать, что сумма двух решений однородной СЛАУ снова будет решением, а также произведение решения на число будет решением.

# ЛЕКЦИЯ IV
# Матричная алгебра

*Матрицей размера* $m \times n$ или $m \times n$*-матрицей* называется прямоугольная таблица чисел вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Матрицы будем обозначать большими латинскими буквами – $A, B, C$ и т.д. Более компактная запись матрицы (4.1) следующая: $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Здесь индекс $i$ пробегает от 1 до $m$, а $j$ изменяется от 1 до $n$ независимо от $i$. Две *матрицы равны*, если, во-первых, совпадают их размеры, а, во-вторых, на одинаковых местах стоят равные друг другу числа. Следующие подматрицы

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}); \qquad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

называются $i$*-ой строкой* и $j$*-ым столбцом* матрицы (4.1). Может случиться так, что матрица $A$ содержит ровно одну строку (один столбец). Тогда такая матрица называется *строкой* (соответственно *столбцом*), а число $n$ (соответственно число $m$) ее длиной (соответственно высотой). Крайний случай, – матрица состоит и из одной строки, и из одного столбца одновременно, то есть размер матрицы – $1 \times 1$. Тогда ее единственный коэффициент в круглые скобки можно не заключать, и такую матрицу можно отождествлять с числом (то есть $(a_{11}) \equiv a_{11} \in \mathbb{R}$).

Множество матриц образует крайне важную и полезную во многих отношениях алгебраическую систему относительно операций сложения, умножения, транспонирования и обращения. К изучению этой системы мы и переходим.

Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ две $m \times n$-матрицы, а $r \in \mathbb{R}$. Тогда *суммой* матриц $A$ и $B$ называется $m \times n$-матрица $A + B$ $(i, j)$-ый коэффициент которой равен $a_{ij} + b_{ij}$. *Произведение матрицы $A$ на число $r$* определяется также покомпонентно: $Ar = rA = (ra_{ij})$. Иными словами, $Ar$ так же, как и $rA$, – матрицы того же размера $m \times n$ и на $(i, j)$-ом месте у них стоит коэффициент $ra_{ij}$.

Заметим, что сложение матриц разных размеров не определяется. *Нулевой* называют матрицу, у которой на всех местах стоят нули. Обозначается нулевая матрица также, как и число ноль, – 0. Нулевая матрица является нейтральным элементом по отношению к сложению, то есть $A + 0 = 0 + A = A$ для любой матрицы $A$. Противоположная матрица к данной матрице $A$ получается посредством умножения на $-1$: $-A = (-a_{ij}) = (-1) \cdot A$. Как и для чисел, имеет место тождество: $A + (-A) = 0$.

**Транспонирование матриц.** Так называется операция над $m\times n$-матрицей $A = (a_{ij})$ (см. (4.1)) превращающая ее в $n\times m$-матрицу $A^\top$, у которой $(i, j)$-ый коэффициент равен $(j, i)$-ому коэффициенту матрицы $A$. Иными словами

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots. & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots. & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Имеют место тождества

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top; \quad (rA)^\top = rA^\top; \quad \left(A^\top\right)^\top = A$$

для любых матриц $A, B$ и числа $r$.

Матрица, у которой число строк и столбцов совпадают, называется *квадратной*. Элементы $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{33}$ и т. д. называются *главной диагональю* матрицы (4.1). Операцию транспонирования квадратной матрицы можно представлять себе как "отражение" коэффициентов матрицы относительно главной диагонали.

**Произведение матриц.** Определим в начале произведение строки на столбец:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Пусть теперь у нас кроме $m \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ имеется еще $n \times k$-матрица $B = (b_{ij})$, у которой число строк $(= n)$ совпадает с числом столбцов матрицы $A$. Тогда произведение $AB$ – это матрица $D = (d_{ij})$ размера $m \times k$, $(i, j)$-ый коэффициент которой равен произведению $i$-ой строки матрицы $A$ на $j$-ый столбец матрицы $B$:

$$d_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Первое основное свойство произведения – *ассоциативность*: для любых матриц $A$, $B$, $C$ размеров $m \times n$, $n \times k$, $k \times l$ соответственно имеет место равенство:

$$A(BC) = (AB)C. \tag{4.2}$$

Второе фундаментальное свойство произведения матриц – *дистрибутивность по отношению к сложению*: для любой $m \times n$-матрицы $A$ и любых матриц $B$, $C$ размера $n \times k$ имеет место равенство

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Если же матрица $F$ имеет размер $k \times n$, а $B$ и $C$ – прежние, то

$$(B + C)F = BF + CF.$$

По поводу доказательства всех этих свойств заметим, что мы будем иметь дело с $n \times m$-матрицами для малых значений $m, n$ (не более трех). В этом случае сформулированные выше свойства проверяются непосредственно. Например, проверим дистрибутивность в частном случае

$$(a, b, c) \cdot \left[ \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \\ m_2 \end{pmatrix} \right] = (a, b, c) \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ l_1 + l_2 \\ m_1 + m_2 \end{pmatrix} =$$

$$= ak_1 + ak_2 + bl_1 + bl_2 + cm_1 + cm_2 = (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{pmatrix} + (a, b, c) \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

Обладает ли произведение матриц свойством коммутативности? Прежде всего может случиться так, что произведение $AB$ определено, а $BA$ – нет. Тогда заведомо равенство $AB = BA$ не имеет места. Далее, пример

$$(a_1, a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2; \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot (a_1a_2) = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 \\ b_2a_1 & b_2a_2 \end{pmatrix}$$

показывает, что размеры матриц $AB$ и $BA$ могут не совпадать между собой по размерности; тогда снова $AB \neq BA$. Но может быть $AB = BA$, если оба произведения существуют и размеры матриц $AB$, $BA$ один и тот же? Это не так, как показывает пример

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Квадратную $n \times n$-матрицу $E$ назовем *единичной*, если у ней на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы – нули. Единичные матрицы малых размерностей таковы

$$1; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица – нейтральный элемент по отношению к произведению матриц, то есть $EA = A$, $AE = A$ для любой матрицы $A$. *Для любых матриц $A$, $B$, произведение которых определено, имеет место равенство*

$$(AB)^\top = B^\top A^\top$$

## IV.1. Задачи

**4.1.** Указать формулу

а) для матрицы $I^n$, где $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) для матриц $M^n$, где (i) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (ii)$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) для матрицы $L^n$, где $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**4.2.** Сколько различных бинарных $3 \times 3$-матриц? Матрица *бинарна*, если ее элементы равны либо 0, либо 1.

**4.3.** Сколько различных симметричных бинарных $4 \times 4$-матриц? Матрица $A$ симметрична, если она совпадает со своей транспонированной: $A^T = A$.

**4.4.** Описать $2 \times 2$-матрицы, квадрат которых – нулевая матрица.

**4.5.** Описать $2 \times 2$-матрицы, квадрат которых – единичная матрица.

# ЛЕКЦИЯ V
## Определители. Правило Крамара. Обратная матрица.

*Определителем квадратной $n \times n$-матрицы* $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}, \tag{5.1}$$

где $M_{j1}$ – определитель матрицы, полученной из матрицы $A$ вычеркиванием первого столбца и $j$-ой строки. Это индукционное определение. Базой индукции является определение $\det(a_{11}) = a_{11}$ определителя числа, который равен самому этому числу. Далее

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

что совпадает с определением (3.5). Определение (3.11) определителя третьего порядка совпадет с индукционным переходом (5.1) от 2 к 3.

Матрица $A$ называется *верхнетреугольной*, если ниже главной диагонали у нее стоят нули, и называется *нижнетреугольной*, если выше главной диагонали у нее стоят нули. Треугольная матрица – это либо верхнетреугольная, либо нижнетреугольная. Верхнетреугольная $3 \times 3$-матрица выглядит так:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

◀ **5.1.** *Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали. В частности,* $\det E = 1$.

◀ **5.2.** *Определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы.*

В силу равенства $\det A = \det A^\top$ все свойства, доказанные для строк, автоматически переносятся на столбцы и наоборот.

◀ **5.3.** *Если $j$-ая строка матрицы $A$ равна сумме двух каких-либо строк* ($\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}''$)*, то и определитель разложим в сумму двух определителей, на $j$-ом месте которых в качестве строк стоят строки-слагаемые* $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$.

$$\begin{bmatrix} \star \\ \mathbf{a}' + \mathbf{a}'' \\ \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star \\ \mathbf{a}' \\ \star \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \star \\ \mathbf{a}'' \\ \star \end{bmatrix}$$

*(элементы, отмеченные звездочкой остаются неизменными)*

◀ **5.4** (**кососимметричность**). *Определитель меняет знак, если переставить местами две строки.*

◀ **5.5.** *Общий множитель строки можно выносить за знак определителя:*

$$\begin{bmatrix} \star \\ \lambda\mathbf{a} \\ \star \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \star \\ \mathbf{a} \\ \star \end{bmatrix}$$

◀ **5.6.** *Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.*

◀ **5.7.** *Определитель с двумя равными (более общо: с двумя пропорциональными) строками равен нулю*

*Доказательство.* Пусть одна и та же строка стоит на $i$-ом и на $j$-ом месте. Поменяем их местами. С одной стороны определитель меняет знак в силу свойства 5.4, а с другой стороны он не изменится. Но число $d$ с условием $d = -d$ может быть только нулем. □

◀ **5.8.** *Определитель не изменится, если над строками (столбцами) совершить элементарное преобразование первого типа, т.е. к одной строке прибавить другую, умноженную на какое-либо число.*

*Доказательство.*

$$\begin{bmatrix} \star \\ \mathbf{a} + k\mathbf{b} \\ \star \\ \mathbf{b} \\ \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star \\ \mathbf{a} \\ \star \\ \mathbf{b} \\ \star \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \star \\ k\mathbf{b} \\ \star \\ \mathbf{b} \\ \star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star \\ \mathbf{a} \\ \star \\ \mathbf{b} \\ \star \end{bmatrix}$$

в силу свойства 5.7. □

Прежде, чем формулировать следующее свойство, приведем определение минора матрицы: $(i, j)$*-ым минором матрицы* $A$ называется определитель матрицы, получающейся из $A$ вычеркиванием $i$-ой строки и $j$-го столбца. Обозначается этот минор – $M_{ij}$. *Алгебраическим дополнением* $(i, j)$*-го элемента матрицы* $A$ называется величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

◀ **5.9 (разложение определителя по столбцу (строке)).** *Для $i$-строки и для $j$-го столбца имеет место разложение определителя $n \times n$-матрицы $A$:*

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj};$$
$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

*Имеют место также ложные разложения по $r$-ой строке и $r$-ому столбцу; если $r \neq i$ и $r \neq j$, то*

$$\begin{aligned} 0 &= a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \cdots + a_{rn}A_{in}, \\ 0 &= a_{1r}A_{1j} + a_{2r}A_{2j} + \cdots + a_{nr}A_{nj}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

В ложных разложениях правая часть совпадает с определителем матрицы, у которой две строки (два столбца) совпадают, поэтому и получается нулевой результат.

**Определитель с углом нулей.** Пусть $A, B$ – квадратные матрицы (не обязательно одинакового размера). Тогда

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B \tag{5.3}$$

для любой матрицы $C$ подходящего размера. Аналогично,

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ D & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B \tag{5.4}$$

для любой матрицы $D$ подходящего размера.

**Определитель произведения матриц**. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю. В противном случае матрица называется *вырожденной.*

**Теорема 5.10.** *Определитель произведения матриц равен произведению определителей:*

$$\det(AB) = \det A \det B$$

*(для любых $n \times n$-матриц $A$ и $B$).*

*Доказательство.*

$$\det(A)\det(B) = \begin{vmatrix} A & E \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & E \\ -AB & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & E \\ -AB & B \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} -AB & B \\ 0 & E \end{vmatrix} = (-1)^n(-1)^n \det(AB) = \det(AB)$$

□

**Следствие 5.11.** *Произведение вырожденной матрицы на любую квадратную матрицу того же размера снова будет вырожденной матрицей. Произведение невырожденных матриц является невырожденной матрицей.*

**Определитель Вандермонда.** Для любых чисел $x_1, \ldots, x_n$ имеет место равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \tag{5.5}$$

В правой части здесь стоит произведение вида

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \ldots (x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})$$

(всего $\frac{n(n-1)}{2}$ сомножителей.)

*Доказательство.* Вычтем из каждого последующего столбца предыдущий, умноженный на $x_1$, а далее разложим по получившейся первой строке – (1,0,0. . . ,0). Приходим к определителю $(n-1) \times (n-1)$:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \ldots & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

Далее вынесем из строк множители $(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1)$ и сведем задачу к вычислению такого же определителя меньшего размера. Применение индукции заканчивает доказательство. □

## V.1. Обратная матрица

**Определение 5.12.** $n \times n$-Матрица $D$ называется *обратной* к $n \times n$-матрице $A$, если $AD = DA = E$.

◀ **5.13.** *Обратная матрица единственна, если она существует.*

*Доказательство.* Пусть матрицы $D, H$ обратны к матрице $A$. Тогда

$$D = DE = D(AH) = (DA)H = EH = H.$$

□

Обратная матрица обозначается как $A^{-1}$. Отметим следующие свойства.

- *Если матрица $A$ обратима, то $A^{-1}$ также обратима, и $(A^{-1})^{-1} = A$.*
- *Если матрицы $A$ и $B$ обратимы, то матрица $AB$ также обратима, и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

**Теорема 5.14.** *Обратная матрица к $n \times n$-матрице $A$ существует тогда и только тогда, когда матрица $A$ невырождена. В этом случае*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

*где $A_{ij}$, как и ранее, алгебраическое дополнение к $(i, j)$-тому элементу матрицы $A$.*

*Доказательство.* Если матрица $A$ вырождена, то и $AD$ вырождена (следствие 5.11), поэтому произведение не может быть равно единичной матрице.

Предположим теперь, что $\det A \neq 0$. Тогда правая часть в (5.6) определена, и можно убедиться непосредственной проверкой, что ее произведение на матрицу $A$ дает единичную матрицу; при этом используются свойства разложения и ложного разложения определителя матрицы по столбцу (строке). □

◀ **5.15.** *Имеет место равенство*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

*для любой квадратной невырожденной матрицы $A$.*

Действительно, применение теоремы об определителе произведения матриц к $A \cdot A^{-1} = E$ дает равенство $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, откуда и следует нужное равенство.

**V.2. Правило Крамара.** Пусть

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \tag{5.7}$$

– система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными.

**Теорема 5.16** (правило Крамара)**.** *Система (5.7) определена тогда и только тогда, когда матрица $A$ невырождена. В этом случае решение находится по формулам:*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}, \tag{5.8}$$

*где $A_i$ – матрица, полученная из матрицы $A$ заменой $i$-го столбца на столбец свободных членов $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top$.*

*Доказательство.* Заметим, что при элементарных преобразованиях системы 1-3 типов свойство невырожденности (вырожденности) матрицы системы сохраняется так же как сохраняется значения правых частей равенств (5.8) . Следовательно правило Крамара (без формул) достаточно доказать в случае, когда матрица $A$ имеет ступенчатый вид. Если $\det A \neq 0$, то в ступенчатом виде на главной диагонали должны стоять ненулевые элементы (см. теорему об определителе треугольной матрицы), т. е. система (5.7) будет иметь единственное решение. Наоборот, если система (5.7) имеет единственное решение, то все неизвестные – главные, следовательно матрица ступенчатого вида невырождена, и поэтому $\det A \neq 0$. Остается проверить формулу (5.8) в случае $A = E$. Это тривиальность. □

**Следствие 5.17.** *Если $\det A = 0$, но $\det A_k \neq 0$ для какого-либо $k$, то система (5.7) несовместна.*

**Теорема 5.18.** *Пусть (5.7) – однородная система, т. е. $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$. Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det A = 0$.*

*Доказательство.* Так как однородная система всегда совместна, то остается две возможности – эта система либо имеет единственное решение (т. е. имеет только нулевое решение), либо имеет бесконечное множество решений, в частности имеет ненулевое решение. Остается применить правило Крамара. □

## V.3. Матричный метод решения линейных систем

Рассмотрим систему $n$ уравнений с $n$ неизвестными (5.7). Обозначим через $A = (a_{ij})$ матрицу этой системы, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^\top$ – столбец свободных членов и через $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ обозначим столбец неизвестных. Тогда эта система может быть записана в *матричном виде*:

$$AX = B$$

Если $\det A \neq 0$, то умножив слева это соотношение на $A^{-1}$, приходим к следующему результату: *если $A$ невырожденная матрица, то система (5.7) определена, и ее решение находится по формуле $X = A^{-1}B$.*

Этот результат показывает, что принципиально уравнение $AX = B$ и метод его решения ничем не отличается от уравнения вида $ax = b$, где $a, b$ числа.

## V.4. Задачи

**5.19.** Пусть числа $a, b, c, d$ выбираются наудачу и независимо из отрезка $[0; 1]$ (например, по равномерному закону распределения). Доказать, что с вероятностью единица матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ будет невырожденной.

**5.20.** Вычислить определители

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 99 & 98 & 97 \\ -99 & -97 & 123 \\ -99 & -98 & -96 \end{vmatrix}.$$

**5.21.** Найти определитель произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 45 & 4 \end{pmatrix}$$

**5.22.** Найти определитель

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}; \quad b)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

**5.23.** Найти определитель

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \end{vmatrix}; \quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

**5.24.** Решить матричное уравнение $AXB = C$ относительно неизвестной матрицы $X$. Здесь $A$ и $B$ – квадратные невырожденные матрицы.

**5.25.** Доказать, что матрица $E - AB$ обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица $E - BA$.

**5.26.** Пусть $A$ – *нильпотентная матрица*, т.е $A^n = 0$ для некоторого натурального $n$. Доказать, что матрица $E - A$ обратима и указать обратную для нее матрицу.

# ЛЕКЦИЯ VI
## Векторы

Объекты, которые характеризуются не только числом, но и направлением, являются векторными величинами. Примерами векторных величин является скорость, ускорение, сила, перемещение. Перейдем к строгим формулировкам.

*Вектором* называется направленный отрезок, т. е. отрезок $AB$, одна крайняя точка которого (скажем $A$) объявлена *началом*, а другая *концом* . Такой вектор обозначается как $\overrightarrow{AB}$. *Длиной* или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка $AB$; она обозначается как $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Если $A = B$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ называется *нулевым* и обозначается $\mathbf{0}$. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ называются *равными*, если их длины равны и они *сонаправлены*, т. е. лежат на одной прямой или на параллельных прямых и "смотрят" в одну сторону. Строгое определение равенства векторов таково: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, если найдутся точки $A'', B''$ такие, что четырехугольники $AA''B''B$ и $A'A''B''B'$ являются параллелограммами (см. рис. 5)

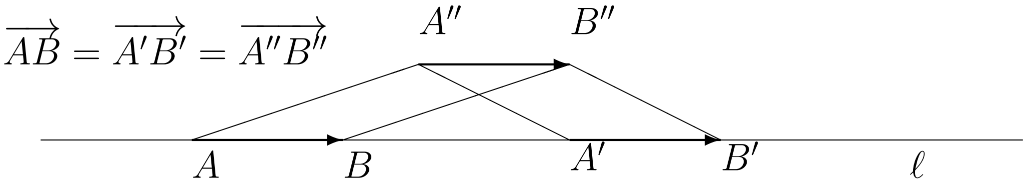



Рис. 5 Равенство двух векторов

Простое геометрическое построение убеждает нас, что *для любого вектора* $\mathbf{a}$ *и любой точки $A$ существует единственная точка $B$ такая, что* $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Этот вектор $\overrightarrow{AB}$ называется *реализацией* вектора $\mathbf{a}$ в точке $A$.

**Сложение векторов.** Пусть имеются два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Реализуем $\mathbf{a}$ в точке $A$: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, а вектор $\mathbf{b}$ реализуем в точке $B$ – конце вектора $\mathbf{a}$: $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ назовем суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (см. рис. 6, а)).

Это определение (**правило треугольника**) корректно, т. е. результат суммы двух векторов не зависит от изначально выбранной точки $A$. Из определения суммы векторов вытекает **равенство Шаля**:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Равенство Шаля можно обобщить на случай многих векторов:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$$

В частности, если $A_1 = A_n$, то результатом будет нулевой вектор.

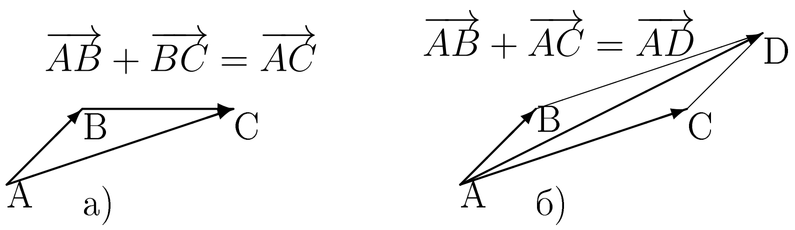



Рис. 6 Сложение двух векторов

Существует другое определение операции суммы двух векторов – *правило параллелограмма*, но оно "работает" только для ненулевых и не коллинеарных векторов. При этом семейство векторов называется *коллинеарным*, если все вектора этого семейства, будучи реализованные в одной точке, лежат на одной прямой. В частности, нулевой вектор коллинеарен любому другому вектору. Пусть имеются два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Реализуем их в одной точке $A$ так, что $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$. Достроим $\Delta ABC$ до параллелограмма $ABDC$. Тогда $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ (см. рис. 6, б)). Результат сложения не зависит от выбора точки $A$.

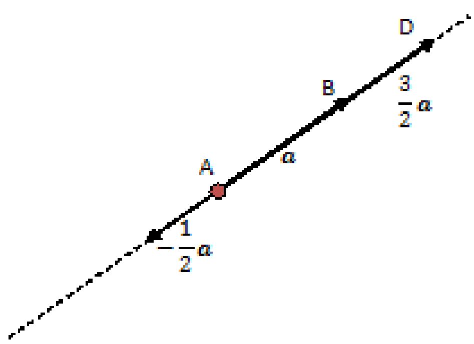



Рис. 7: Произведение вектора на число

**Произведение вектора a на число** $\lambda$ – это вектор $\mathbf{b}$, имеющий длину $|\lambda|\,|\mathbf{a}|$, сонаправленный с вектором $\mathbf{a}$, если $\lambda > 0$, противоположно направленный, если $\lambda < 0$, и равный нулевому вектору, если $\lambda = 0$ (см. рис. 7).

Заметим, что из определения умножения вектора на число вытекает, что *вектор* $\mathbf{a}$ *коллинеарен ненулевому вектору* $\mathbf{b}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ *для подходящего числа* $\lambda$.

Множество всех векторов в пространстве, относительно определенных выше операций сложения и умножения обладает следующими свойствами:

**ЛП1.** $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (коммутативность);

**ЛП2.** $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (ассоциативность);

**ЛП3.** $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ (существование нуля для операции сложения);

**ЛП4.** для каждого вектора $\overrightarrow{AB}$ можно построить *противоположный вектор* $\overrightarrow{BA}$, сумма с которым дает нулевой вектор, противоположный вектор к вектору $\mathbf{a}$ обозначаем $-\mathbf{a}$; он получается умножение вектора $\mathbf{a}$ на $-1$;

**ЛП5.** $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ (ассоциативность умножения);

**ЛП6.** $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ и $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (дистрибутивность);

**ЛП7.** $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ (унитарность).

Эти равенства верны для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и любых действительных чисел $\lambda$ и $\mu$. Доказательство этого факта – весьма длинная и скучная, хотя и элементарная проверка. Например, докажем ассоциативность сложения (см. рис. 8). Реализуем вектор $\mathbf{a}$ в точке $A$: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, вектор $\mathbf{b}$ реализуем в точке $B$: $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, а вектор $\mathbf{c}$ реализуем в точке $C$: $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$. Тогда

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$

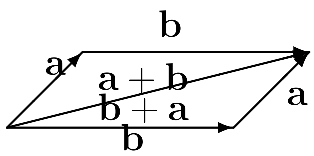
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Здесь четыре раза мы применили равенство Шаля. Правые части равны, значит равенство $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ доказано.

Свойство ЛП1 следует из правила параллелограмма сложения двух векторов. Свойство ЛП4 доказывается так: если $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, то $-\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$. Действительно,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$, где ещё раз применено равенство Шаля. Для того, чтобы доказать ЛП5, заметим сначала, что модули левой и правой частей совпадают с $|\lambda|\,|\mu|\,|\mathbf{a}|$. Ясно также, что векторы $(\lambda\mu)\mathbf{a}$ и $\lambda(\mu\mathbf{a})$ лежат на одной прямой и имеют общее начало. Остается убедиться, что они сонаправлены. Это достигается с помощью перебора следующих случаев 1) $\lambda > 0$, $\mu > 0$, 2) $\lambda > 0$, $\mu < 0$, 3) $\lambda < 0$, $\mu > 0$, 4) $\lambda < 0$, $\mu < 0$, 5) либо $\lambda = 0$, либо $\mu = 0$. В случаях 1) и 4) вектора $(\lambda\mu)\mathbf{a}$ и $\lambda(\mu\mathbf{a})$ сонаправлены с $\mathbf{a}$, а поэтому сонаправлены между собой; в случаях 2) и 3) эти вектора сонаправлены с $-\mathbf{a}$, а поэтому также сонаправлены между собой. В случае 5) эти вектора нулевые.

Свойства ЛП3 и ЛП7 – тривиальности.



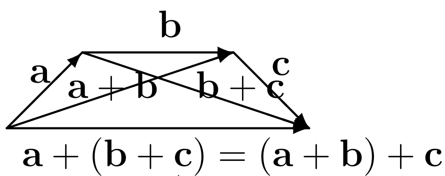




Рис. 8 Коммутативность и ассоциативность сложения

**Проекция вектора на плоскость или прямую.** Пусть $\alpha$ – плоскость или прямая в пространстве. *Проекцией точки* $A$ на $\alpha$ называется основание перпендикуляра, опущенного из точки $A$ на $\alpha$. Пусть задан вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Проекции точек $A, B$ на $\alpha$ обозначим $A', B'$. Тогда вектор $\overrightarrow{A'B'}$ назовем проекцией вектора $\mathbf{a}$ на прямую (плоскость) $\alpha$. Это определение корректно, т.е. результат не зависит от реализации вектора $\mathbf{a}$. Более того, проекция обладает свойством линейности:

$$\text{Проекция}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{Проекция}(\mathbf{a}) + \text{Проекция}(\mathbf{b});$$

$$\text{Проекция}(\lambda\mathbf{a}) = \lambda \cdot \text{Проекция}(\mathbf{a})$$

Первое соотношение здесь вытекает из равенства Шаля, а второе – из свойств подобных треугольников.

**Стандартный базис** пространства векторов состоит из единичных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, сонаправленных с осями $Ox, Oy, Oz$ соответственно (рис. 9). Этот набор векторов *ортонормирован* в том смысле, что $\mathbf{i} \perp \mathbf{j} \perp \mathbf{k} \perp \mathbf{i}$ и $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$.

Наоборот, любой ортонормированный набор трех векторов вместе с выбранным началом координат – точкой $O$ полностью определяет декартову систему координат в пространстве. Стандартный базис на плоскости состоит из двух векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$.

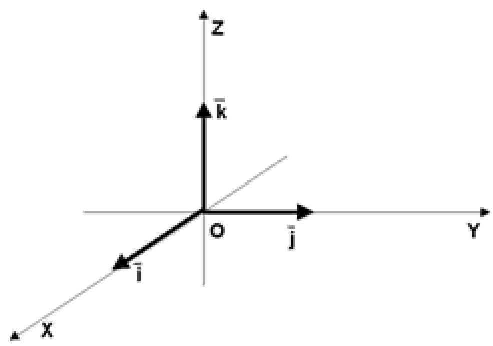



Рис. 9: Стандартный ортонормированный базис

**Теорема 6.1.** *Любой вектор* $\mathbf{a}$ *разложим в линейную комбинацию*

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

*единственным образом. Числа* $a_x, a_y, a_z$ *называются* координатами вектора $\mathbf{a}$ *относительно базиса* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

*Доказательство.* Можно считать, что $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, т.е. начало вектора $\mathbf{a}$ совпадает с началом координат, а точка $A$ имеет координаты $a_x, a_y, a_z$. Тогда $OA$ – диагональ прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$, $a_z\mathbf{k}$. Следовательно, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ согласно правила параллелограмма сложения векторов.

Если, кроме того, $\mathbf{a} = a'_x\mathbf{i} + a'_y\mathbf{j} + a'_z\mathbf{k}$ и, например $a'_x \neq a_x$, то

$$\mathbf{i} = \frac{1}{a'_x - a_x}((a_y - a'_y)\mathbf{j} + (a_z - a'_z)\mathbf{k}),$$

т.е. вектор $\mathbf{i}$ лежит в плоскости $Oyz$ – противоречие. Противоречие указывает на единственность координат $a_x, a_y, a_z$. $\square$

Из теоремы 6.1 вытекает, что вектора складываются и умножаются на числа покоординатно.

◀ **6.2.** *Координаты векторов* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *и* $\lambda\mathbf{a}$ *будут*

$$(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z); \quad (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

*соответственно.*

**Пример 6.3.** Запись $\mathbf{a}(3;-4;7)$ означает, что мы рассматриваем вектор с координатами $a_x=3, a_y=-4, a_z=7$. Это равносильно записи $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$. Если $\mathbf{b}(-1;2;5)$ – еще один вектор, то $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}=2(3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k})+3(-\mathbf{i}+2\mathbf{j}+5\mathbf{k})=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+29\mathbf{k}$.

**Следствие 6.4.** *Пусть начало* $A$ *и конец* $B$ *вектора заданы координатами:* $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$. *Тогда упорядоченная тройка*

$$a_x=x_2-x_1, \qquad a_y=y_2-y_1, \qquad a_z=z_2-z_1 \tag{5}$$

*совпадает с координатами вектора* $\mathbf{a}:=\overrightarrow{AB}$.

*Доказательство.* Имеет место равенство $\mathbf{a}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Из определения координат вектора вытекает, что координаты вектора, реализованного в начале координат, совпадают с координатами концевой точки. Следовательно,

$$a_x=x(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=x(\overrightarrow{OB})-x(\overrightarrow{OA})=x(B)-x(A)=x_2-x_1.$$

Аналогично доказываются оставшиеся два равенства. □

*Длина вектора* $\mathbf{a}(a_x,a_y,a_z)$ *выражается через его координаты следующим образом*

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{6.1}$$

Пусть $\alpha,\beta,\gamma$ – углы, которые образует ненулевой вектор $\mathbf{a}$ с осями $OX, OY, OZ$ соответственно. Тогда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ назовем *направляющими косинусами* вектора $\mathbf{a}$. Вектор, сонаправленный с вектором $\mathbf{a}$ и имеющий единичную длину, назовем *ортом* и обозначим $\mathbf{a}^o$. Нетрудно видеть, что, если $\mathbf{a}$ – ненулевой вектор с координатами $(a_x,a_y,a_z)$, то координаты орта $\mathbf{a}^o$ имеют вид

$$\left(\frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}\right),$$

причем они совпадают с направляющими косинусами вектора $\mathbf{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}.$$

Зная длину и направляющие косинусы, можно найти координаты вектора по формулам

$$a_x = |\mathbf{a}|\cos\alpha, \quad a_y = |\mathbf{a}|\cos\beta, \quad a_z = |\mathbf{a}|\cos\gamma. \tag{6.2}$$

**Пример 6.5.** Модуль вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ равен $\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^1} = \sqrt{9} = 3$. Направляющие косинусы этого вектора суть: $\cos\alpha = 2/3$; $\cos\beta = -2/3$; $\cos\gamma = 1/3$. Они же являются координатами орта вектора $\mathbf{a}$, т.е. $\mathbf{a}^o = 2/3\mathbf{i} - 2/3\mathbf{j} + 1/3\mathbf{k}$.

Из соотношения (6.1) вытекает равенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Тем самым направляющие косинусы не являются независимыми величинами.

## VI.1. Задачи

**6.6.** Дан треугольник $ABC$ со сторонами $|AB| = 2, |AC| = 3$. Пусть $AM$ – биссектриса $\Delta ABC$. Выразим вектор $\overrightarrow{AM}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

**6.7.** Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-3; 2; 1)$, $B(3; 0; 6)$, $C(5; 2; -7)$.

**6.8.** Найти вектор $\mathbf{a}$, модуль которого равен 8, и который образует с осями $Ox$ и $Oy$ углы $60^0$.

# ЛЕКЦИЯ VII
# Векторная алгебра

## VII.1. Скалярное произведение

Одна из важнейших физических величин, работа, в простейшем случае вычисляется по формуле $A = F \cdot a$, где $F$ – величина действующей силы, сонаправленной с перемещением, а $a$ – величина перемещения. Если же вектор силы $\mathbf{F}$ направлен под углом к вектору перемещения, то следует разложить силу на две составляющие $\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + \mathbf{N}$, где вектор $\mathbf{F}_a$ коллинеарен $\mathbf{a}$, а вектор $\mathbf{N}$ ортогонален $\mathbf{a}$. Ортогональная составляющая работу не производит, и поэтому

$$A = \begin{cases} |\mathbf{F}_a||\mathbf{a}|, & \text{если } \mathbf{F}_a \text{ и } \mathbf{a} \text{ сонаправлены,} \\ -|\mathbf{F}_a||\mathbf{a}|, & \text{если } \mathbf{F}_a \text{ и } \mathbf{a} \text{ направлены в противоположные стороны.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что это равенство может быть записано одной формулой $A = |\mathbf{F}||\mathbf{a}|\cos(\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{a}})$, где $\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{a}}$ – угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{a}$.

**Определение 7.1.** *Скалярным произведением* геометрических векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).$$

Если один из векторов нулевой, то и скалярное произведение равно 0.

Это произведение называется скалярным, поскольку двум векторам сопоставляется число – скалярная величина.

Установим фундаментальные свойства скалярного произведения. Сразу из определения следует **симметричность**: *скалярное произведение не зависит от порядка сомножителей:*

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}.$$

*Скалярным квадратом* называется скалярное произведение вектора на самого себя: $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. Имеет место *положительная определенность и невырожденность* скалярного произведения:

$$\mathbf{a}^2 \geq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{a}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

В частности, длина вектора выражается через скалярное произведение следующим образом:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}. \tag{7.1}$$

Угол между ненулевыми векторами также выражается через скалярное произведение, ибо

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \qquad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}). \tag{7.2}$$

В формулах (7.1) и (7.2) заключается геометрический смысл скалярного произведения, оно задает евклидову геометрию в пространстве.

Если векторы ортогональны, т. е. лежат на перпендикулярных прямых, то скалярное произведение равно нулю. Очевидно верно и обратное утверждение. Таким образом мы получаем **критерий ортогональности:**

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

В частности, ортонормированность стандартного базиса можно выразить так:

$$\mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0; \qquad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1. \tag{7.3}$$

Для доказательства следующего свойства реализуем вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в одной точке $O$ и прямую $\ell$, на которой лежит вектор $\mathbf{a}$, превратим в ось $Ox$, выбрав положительное направление по вектору $\mathbf{a}$. Будем обозначать $X_b, X_c, X_{b+c}$ координаты векторов $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}$ на оси $Ox$. Тогда

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b} + \mathbf{c}| \cos(\mathbf{b} + \mathbf{c}, x) = |\mathbf{a}| X_{\mathbf{b}+\mathbf{c}} =$$

$$= |\mathbf{a}|(X_b + X_c) = |\mathbf{a}|X_b + |\mathbf{a}|X_c = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{b}, x) + |\mathbf{a}||\mathbf{c}| \cos(\mathbf{c}, x) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

Мы применили формулу (6.2) – координата вектора по оси Ох равна произведению длины этого вектора на направляющий косинус, а также применили правило покоординатного сложения векторов. Итак, мы доказали *билинейность*:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac};\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac}+\mathbf{bc};\ \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab}).$$

Действительно, равенство $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac}+\mathbf{bc}$ верно в силу симметричности скалярного произведения, а равенство $\mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{ab}$ доказывается, как и выше:

$$\mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|X_{\lambda\mathbf{b}} = |\mathbf{a}|\lambda X_b = \lambda|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \lambda\mathbf{ab}.$$

**Пример 7.2.** Найдем сторону $BC$ треугольника $ABC$, если $|AC| = 5$; $|AB| = 5\sqrt{2}$ и $\angle A = 45^0$. Вспомним сначала правило Шаля $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$. Отсюда: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Тогда

$$|CB|^2 = \overrightarrow{CB}^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 =$$

$$= 25\cdot 2 - 2\cdot 5\cdot\sqrt{2}\cdot 5\cdot\cos 45^0 + 25 = 50 - 50\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/2 + 25 = 25.$$

Отсюда следует, что длина стороны $CB$ равна 5, тем самым треугольник $ABC$ равнобедренный ( $AC = BC$).

**Теорема 7.3** (вычисление скалярного произведения в координатах)**.** *Если* $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ *и* $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$, *то*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

*Доказательство.* Применяем билинейность и учтем (7.3):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_zk)\cdot(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}) = a_xb_x\mathbf{i}^2+a_yb_y\mathbf{j}^2+a_zb_z\mathbf{k}^2+a_xb_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}+\cdots =$$

$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z + a_xb_y\cdot 0 + \cdots = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

(Точками здесь отмечены оставшиеся пять нулевых слагаемых). □

**Следствие 7.4.** *Если вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *ненулевые, то*

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (7.4)$$

*В частности, вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *ортогональны тогда и только тогда, когда* $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$.

### VII.2. Векторное произведение.

Определим сначала понятие правой и левой тройки векторов. Тройку векторов ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$) – именно в этом порядке, назовем *правой*, если

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} > 0.$$

Если этот определитель меньше нуля, то тройку векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ назовем *левой*. Заметим, что в случае равенства нулю этого определителя, вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *компланарны* (т.е. лежат в одной плоскости, если их реализовать в общей начальной точке), и такая тройка ориентации не имеет. Из свойств определителей вытекают следующие свойства ориентации тройки векторов.

**А.** *При перестановке местами двух векторов ориентация тройки меняется.*

**Б.** *При прибавлении к вектору в тройке другого вектора из тройки, умноженного на какое-либо число, ориентация тройки не меняется.*

**В.** *При умножении вектора в тройке на положительное число ориентация не меняется, а при умножении на отрицательное число – меняется.*

Определим теперь *векторное произведение вектора* $\mathbf{a}$ *на вектор* $\mathbf{b}$ как вектор $\mathbf{c}$, удовлетворяющий следующим свойствам:

- $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;
- $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$;
- либо $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, и тогда $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, либо тройка векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ правая.

Физическая интерпретация третьего условия состоит в том, что, глядя из конца вектора $\mathbf{c}$, вращение от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ кажется происходящим против часовой стрелки (см. рис. 10).

Векторное произведение обозначаем $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Заметим, что

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S_{\square \mathbf{a}, \mathbf{b}}$$

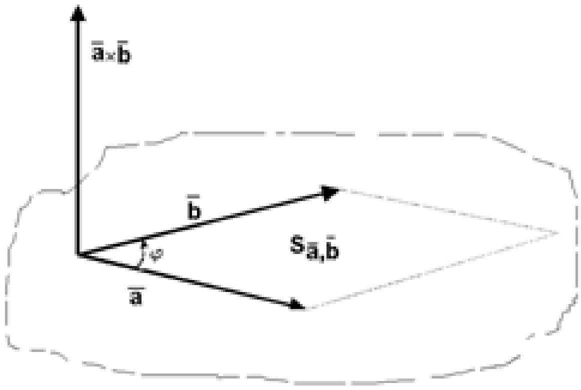



Рис. 10: Векторное произведение

– площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**.

Векторное произведение имеет физический смысл: $\mathbf{M} = \mathbf{a} \times \mathbf{F}$ – момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки $O$, где вектор **a** приложен к точке $O$, а сила $\mathbf{F}$ приложена к концу вектора **a**.

**Теорема 7.5** (вычисление векторного произведения в координатах). *Имеет место формула вычисления векторного произведения двух векторов* **a** *и* **b**:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}. \tag{7.5}$$

*Доказательство.* Обозначим вектор, определяемый правой частью равенства (7.5), через **c**. Применяя критерий ортогональности, проверим, что $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} a_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} a_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} a_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

как определитель с двумя равными строками. Аналогично доказывается, что $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$. Далее

$$|\mathbf{c}|^2 = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 =$$

$$= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$$

Отсюда вытекает равенство $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$ с учетом того, что $0 \le \widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}} \le \pi$, а синусы этих углов неотрицательны.

Проверим третье условие. Предположим, что вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны. Докажем, что тройка $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ – правая.

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2 > 0.$$

Здесь определитель $3\times 3$ мы разложили по третьей строке. Строгое неравенство вытекает из неколлинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; в этом случае хотя бы один из определителей $2\times 2$ отличен от 0. $\square$

**Следствие 7.6.** *Площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*, равна*

$$S_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}.$$

*В частности, если* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *– вектора на плоскости, то площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*, вычисляется по следующей формуле*

$$S_{\square\mathbf{a},\mathbf{b}} = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Из доказанной выше теоремы и из свойств определителей легко следуют свойства векторного произведения.

**Свойства векторного произведения**

**ВП1.** *Билинейность:* $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ и $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})$.

**ВП2.** *Кососимметричность:* $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ *для всех векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$.

**ВП3.** $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$; $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$; $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$.

## VII.3. Смешанное произведение трех векторов.

*Смешанным произведением* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ называется число $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Применяя формулу вычисления скалярного произведения через координаты к векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, получаем формулу вычисления смешанного произведения через координаты векторов:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Определение правой и левой тройки векторов можно переформулировать так: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ будет правой тройкой, если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$; если же $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$, тройка векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ будет левой.

### Свойства смешанного произведения

**СП1.** *Смешанное произведение полилинейно, т.е. линейность по каждому аргументу.*

**СП2.** (кососимметричность) *При перестановке любых двух векторов смешанное произведение меняет знак.*

**СП3.** (калибровка) $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1$.

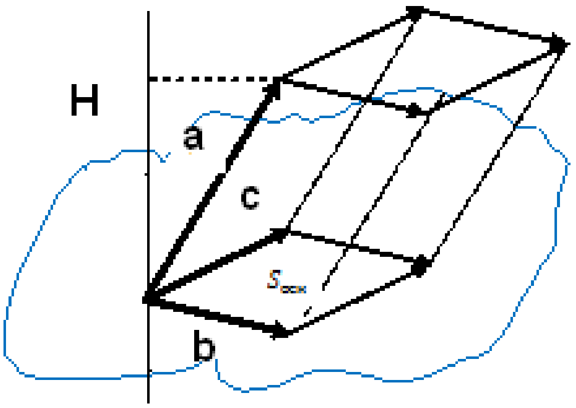



Рис. 11: Геометрический смысл смешанного произведения

**Теорема 7.7** (геометрический смысл смешанного произведения и определителя третьего порядка)**.** *Смешанное произведение* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *равно объему* *параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *, если тройка* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *правая, и равно этому объему со знаком минус, если тройка* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *левая.*

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда данная тройка векторов правая (см. рис. 11). Тогда

$$V_{\square} = H \cdot S_{\square \mathbf{b},\mathbf{c}} = |\mathbf{a}| \cos\varphi |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

что и требовалось доказать. □

Напомним, что семейство векторов компланарно, если все вектора этого семейства коллинеарны одной и той же плоскости.

**Теорема 7.8** (критерий компланарности)**.** *Следующие условия относительно векторов* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *эквивалентны:*

1. *тройка векторов* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *компланарна;*
2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$*;*
3. $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0;$
4. *существует нетривиальная линейная зависимость, т.е. существуют числа* $\lambda, \mu, \nu$*, не все равные нулю, что* $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{0}$*;*
5. *один из векторов выражается через другие в виде линейной комбинации.*

*Доказательство.* $1 \Rightarrow 2$. Можно считать, что вектора $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не коллинеарны. Вектор $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ортогонален плоскости, содержащей эти вектора, тем самым он ортогонален $\mathbf{a}$. Отсюда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$.

Импликация $2 \Rightarrow 3$ верна в силу теоремы о вычислении смешанного произведения в координатах.

$3 \Rightarrow 4$. В силу следствия правила Крамара существуют числа $\alpha, \beta, \gamma$, не все равные 0, и такие, что

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$ – нетривиальная линейная зависимость.

$4 \Rightarrow 5$. Если $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$ нетривиальная линейная зависимость, и, скажем, $\alpha \neq 0$, то $\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\mathbf{c}$.

$5 \Rightarrow 1$. Если, например, $\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\mathbf{c}$, то все три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ коллинеарны плоскости, содержащей вектора $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. □

## VII.4. Задачи

**7.9.** Даны вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Найти $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$.

**7.10.** Известно, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$ и угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\pi/3$. Найти длину векторного произведения $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

**7.11.** Даны точки $A(1; 2; -1)$, $B(2; 0; 3)$, $C(5; -2; 0)$. Найти а) площадь треугольника $ABC$, б) высоту этого треугольника, опущенную из вершины $A$.

**7.12.** Доказать *формулу Лагранжа*:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

**7.13.** Доказать *тождество Якоби*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Указание: применить формулу Лагранжа.

# ЛЕКЦИЯ VIII
# Прямые и плоскости.

В этой лекции мы рассмотрим линейные объекты на плоскости и в пространстве. Эти объекты задаются системой линейных уравнений, в частности, одним линейным уравнением $Ax + By + C = 0$ (на декартовой плоскости) или $Ax + By + Cz + D = 0$ (в пространстве). Конечно простейший объект такого рода – точка, которая задается системой $2 \times 2$ на плоскости и системой $3 \times 3$ в пространстве, определители которых не равны нулю (см. правило Крамара, Лекция 3).

## VIII.1. Прямая на плоскости

Пусть $L$ – прямая на плоскости, $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ – ненулевой вектор, перпендикулярный $L$, $P(x_0, y_0)$ - какая-либо точка на прямой $L$. Тогда точка $Q(x, y)$ принадлежит прямой $L$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{PQ}$ ортогонален вектору $\mathbf{n}$, а это имеет место в том и только том случае, когда $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ и это эквивалентно тому, что

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Мы получаем уравнение прямой $L$, проходящей через заданную точку $P(x_0, y_0)$ и перпендикулярную заданному вектору $\mathbf{n}$. Отсюда, обозначив $C = -Ax_0 - By_0$, получим:

$$Ax + By + C = 0$$

– общее уравнение прямой на плоскости. Далее:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{8.1}$$

– уравнение прямой, проходящей через две не совпадающие точки $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$. Действительно, подставляя в (8.1) вместо $(x, y)$ координаты заданных точек, получаем верные равенства. Так как либо $x_2 - x_1 \neq 0$, либо $y_2 - y_1 \neq 0$, то (8.1) действительно будет уравнением прямой. Заметим, что вектор $(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$ коллинеарен прямой $L$. Соотношение (8.1) эквивалентно пропорции

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

отсюда получаем решение еще одной стандартной задачи:

$$\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q} \tag{8.2}$$

– уравнение прямой, проходящей через точку $P(x_1,y_1)$ и коллинеарной заданному ненулевому вектору $p\mathbf{i}+q\mathbf{j}$. Если обе равные дроби в (8.2) считать параметром $t\in\mathbb{R}$ и выразить $x,y$ через этот параметр, то получим

$$\begin{cases} x=x_1+pt \\ y=y_1+qt \end{cases}$$

– параметрическое уравнение прямой.

Поставим задачу о аналитическом задании отрезка $[P(x_1,y_1);Q(x_2,y_2)]$. По определению этот отрезок есть часть прямой (8.1), состоящая из точек, лежащих между $P$ и $Q$. Точка $R$ лежит между $P$ и $Q$, если и только, если

$$|PQ|=|PR|+|RQ|. \tag{8.3}$$

Для аналитического описания таких точек сначала запишем уравнение прямой (8.1) в параметрическом виде: $x(t)=x_1+(x_2-x_1)t$; $y(t)=y_1+(y_2-y_1)t$. Утверждаем, что точка $R(x(t);y(t))$ принадлежит отрезку $[P;Q]$ тогда и только тогда, когда $0\le t\le 1$. В самом деле, $|PR|=|t||PQ|$; $|RQ|=|1-t||PQ|$ для произвольной точки $R$ прямой (8.1). Равенство (8.3) тогда сводится к $|t|+|1-t|=1$, а оно имеет место тогда и только тогда, когда $0\le t\le 1$. Подводим итог: параметрическое описание отрезка $[P,Q]$ есть

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t=(1-t)x_1+tx_2; \\ y=y_1+(y_2-y_1)t=(1-t)y_1+ty_2. \end{cases} \qquad 0\le t\le 1$$

В частности, точка $t=n/(n+m)$ делит единичный отрезок в отношении $n:m$, считая от нуля; поэтому точка

$$R\left(\frac{mx_1+nx_2}{m+n};\frac{my_1+ny_2}{m+n}\right)$$

делит отрезок $[P;Q]$ в отношении $n:m$, считая от точки $P$. Здесь $m>0; n>0$.

*Центр тяжести* двух материальных точек $P$ и $Q$ весом $a$ и $b$ килограмм соответственно имеет координаты

$$\left(\frac{x_Pa+x_Qb}{a+b};\frac{y_Pa+y_Qb}{a+b}\right),$$

т.е. он делит отрезок $PQ$ в отношении $b : a$, считая от точки $P$.

**Теорема 8.1** (расположение двух прямых на плоскости)**.** *Пусть* $L_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $L_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *– две прямые на плоскости. Тогда*

*а)* $L_1$ *и* $L_2$ *пересекаются в точке тогда и только тогда, когда* $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$*;*

*б)* $L_1 = L_2$ *тогда и только тогда, когда* $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$*;*

*в)* $L_1 \parallel L_2$ *тогда и только тогда, когда* $A_1/A_2 = B_1/B_2 \neq C_1/C_2$*;*

*г)* $\cos(L_1, L_2) = \frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$*;*

*д)* $L_1 \perp L_2$ *тогда и только тогда, когда* $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$*.*

Доказательство утверждения а) следует из правила Крамара, примененного к системе

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Утверждения б) и в) вытекают из метода Гаусса решения этой системы линейных уравнений.

Расстояние от точки $P(x_1, y_1)$ до прямой $L$, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, может быть вычислено по формуле:

$$d(P, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{8.4}$$

Действительно, выберем точку $Q(x_0, y_0)$ на прямой $L$. Вектор $B\mathbf{i} - A\mathbf{j}$ перпендикулярен вектору $A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ и тем самым он коллинеарен прямой $L$. Построим точку $R(x_0 + B; y_0 - A) \in L$ и достроим $\Delta QPR$ до параллелограмма $QPSR$. Высота этого параллелограмма, опущенная из вершины $P$, как раз равна расстоянию $d(P, L)$. Следовательно площадь параллелограмма $QPSR$ равна $\sqrt{A^2 + B^2} \cdot d(P, L)$. С другой стороны площадь того же параллелограмма есть модуль векторного произведения

$$(B\mathbf{i} - A\mathbf{j}) \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} B & -A \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} \mathbf{k} = [B(y_1 - y_0) + A(x_1 - x_0)]\mathbf{k} =$$

$$= (Ax_1 + By_1 + C)\mathbf{k},$$

ибо из $Ax_0 + By_0 + C = 0$ следует, что $-Ax_0 - By_0 = C$. Приравнивая $|Ax_1 + By_1 + C| = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot d(P, L)$ и затем, деля обе части на $\sqrt{A^2 + B^2}$, получаем требуемую формулу (8.4).

**Теорема 8.2** (Полуплоскости, определяемые прямой)**.** *Пусть на плоскости задана прямая $L : Ax + By + C = 0$. Прямая $L$ разделяет плоскость на две (открытые) полуплоскости $L^+$ и $L^-$, определяемые неравенствами $Ax + By + C > 0$ и $Ax + By + C < 0$. Если точки $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_2, y_2)$ принадлежат одной полуплоскости, то и весь отрезок $[P; Q]$ принадлежит этой полуплоскости. Если же точки $P$ и $Q$ принадлежат разным полуплоскостям, то любая непрерывная кривая (в частности, отрезок прямой), соединяющая $P$ с $Q$, пересекает прямую $L$.*

*Доказательство.* Пусть $P, Q \in L^+$ и $R(tx_1 + (1-t)x_2; ty_1 + (1-t)y_2) \in [P; Q]$. Тогда

$$A(tx_1 + (1-t)x_2) + B(ty_1 + (1-t)y_2) + C =$$
$$= (Ax_1 + By_1 + C) + (1-t)(Ax_2 + By_2 + C) > 0.$$

Отсюда следует, что $R \in L^+$. Предположим теперь, что $P \in L^+$; $Q \in L^-$. Соединим точки $P$ и $Q$ непрерывной кривой $x = x(t); y = y(t)$, $(0 \leq t \leq 1)$. Функции $x(t), y(t)$ непрерывны и $x(0) = x_1$; $y(0) = y_1$; $x(1) = x_2$; $y(0) = y_2$. Тогда $f(t) = Ax(t) + By(t) + C$ – непрерывная функция, принимающая на концах отрезка $[0; 1]$ значения разных знаков. По теореме 14.4 Больцано-Коши найдется точка $c \in (0; 1)$ такая, что $f(c) = 0$. Это означает, что точка $R(x(c); y(c))$ принадлежит прямой $L$. □

## VIII.2. Плоскость в пространстве

Пусть $\tau$ - плоскость в пространстве, $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ – ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости $\tau$, $P(x_0, y_0, z_0)$ – какая-либо точка на плоскости $\tau$. Тогда

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{8.5}$$

– уравнение плоскости $\tau$, проходящей через заданную точку $P(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной заданному вектору $\mathbf{n}$. Этот факт доказывается точно также как и для прямой на плоскости. Отсюда:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

– общее уравнение плоскости в пространстве. Далее:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{8.6}$$

– уравнение плоскости, проходящей через три точки $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Действительно, подставляя координаты точек $P, Q, R$ в уравнение (8.6), получаем верные числовые равенства, так как определитель с двумя равными строками, а также с нулевой строкой, равен нулю. Раскрывая определитель левой части уравнения (8.6), заведомо получаем уравнение вида (8.5), при этом $(A; B; C) \neq (0; 0; 0)$, так как вектора $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}$ не коллинеарны.

Задав вместо точек $Q, R$ вектора $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}$, получаем решение еще одной стандартной задачи:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p & q & r \\ p' & q' & r' \end{vmatrix} = 0$$

– уравнение плоскости, проходящей через точку $P(x_1, y_1, z_1)$ и коллинеарной двум векторам $p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ и $p'\mathbf{i} + q'\mathbf{j} + r'\mathbf{k}$, не коллинеарным между собой.

**Расположение двух плоскостей в пространстве.** Пусть $\tau_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\tau_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – две плоскости в пространстве. Тогда:

а) $\tau_1 = \tau_2$ тогда и только тогда, когда $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2 = D_1/D_2$;

б) $\tau_1 \parallel \tau_2$ тогда и только тогда, когда $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2 \neq D_1/D_2$;

в) $\cos(\tau_1, \tau_2) = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$;

г) $\tau_1 \perp \tau_2$ тогда и только тогда, когда $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;

Расстояние от точки $P(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $\tau$ может быть вычислено по формуле:

$$d(P, \tau) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Доказательство этого факта, также как и следующего, такое же как и для прямой на плоскости.

**Полупространства, определяемые плоскостью.** Пусть в пространстве задана плоскость $\tau\colon Ax+By+Cz+D=0$. Плоскость $\tau$ разделяет пространство на два полупространства, задаваемые неравенствами $Ax+By+Cz+D>0$ и $Ax+By+Cz+D<0$. Если точки $P(x_1,y_1,z_1)$ и $Q(x_2,y_2,z_2)$ принадлежат одному полупространству, то и весь отрезок $[P;Q]$ принадлежит этому же полупространству. Если же точки $P$ и $Q$ принадлежат разным полупространствам, то любая непрерывная пространственная кривая, соединяющая $P$ с $Q$, пересекает плоскость $\tau$.

## VIII.3. Прямая в пространстве

Пусть $L$ - прямая в пространстве, $P(x_0,y_0,z_0)\in L$ и ненулевой вектор $\mathbf{a}=p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k}$ коллинеарен прямой $L$. Тогда точка $Q(x,y,z)$ принадлежит прямой $L$ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{QP}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, а это имеет место в том и только том случае, когда $\overrightarrow{QP}=t\mathbf{a}$ для некоторого числа $t\in\mathbb{R}$. Переходя к покоординатной записи, получаем

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r} \tag{8.7}$$

– *каноническое уравнение прямой в пространстве.* Обозначая равные части соотношения (8.7) через $t$ – параметр и выражая переменные $x,y,z$ через этот параметр, получаем

$$\begin{cases} x=x_0+pt;\\ y=y_0+qt;\\ z=z_0+rt \end{cases}$$

– параметрическое уравнение прямой в пространстве.

Общее уравнение прямой в пространстве имеет вид:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}, \tag{8.8}$$

где вектора $A_1\mathbf{i}+B_1\mathbf{j}+C_1\mathbf{k}$ и $A_2\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+C_2\mathbf{k}$ не коллинеарны, и тем самым система (8.8) имеет одно свободное неизвестное, в качестве которого можно взять $z$ в случае $\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0$.

**Расположение двух прямых в пространстве.** Пусть в пространстве заданы две прямые - $L$, с уравнением (8.7), и

$$L' \colon \frac{x - x_0'}{p'} = \frac{y - y_0'}{q'} = \frac{z - z_0'}{r'}.$$

Тогда:

а) $L = L'$ в том и только том случае, когда

$$p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \parallel p'\mathbf{i} + q'\mathbf{j} + r'\mathbf{k} \parallel (x_0 - x_0')\mathbf{i} + (y_0 - y_0')\mathbf{j} + (z_0 - z_0')\mathbf{k};$$

б) $L \parallel L'$ если и только, если

$$p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \parallel p'\mathbf{i} + q'\mathbf{j} + r'\mathbf{k} \nparallel (x_0 - x_0')\mathbf{i} + (y_0 - y_0')\mathbf{j} + (z_0 - z_0')\mathbf{k};$$

в) $\cos(L, L') = \frac{pp' + qq' + rr'}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}}$;

г) прямые $L$ и $L'$ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ x_0 - x_0' & y_0 - y_0' & z_0 - z_0' \end{vmatrix} = 0; \qquad (8.9)$$

д) прямые $L$ и $L'$ скрещиваются (т.е. не лежат в одной плоскости) тогда и только тогда, когда определитель в (8.9) не равен нулю.

**Расположение прямой и плоскости.** Пусть в пространстве задана плоскость $\tau \colon Ax + By + Cz + D = 0$ и задана прямая $L$ уравнениями (8.7). Тогда:

а) $L \subset \tau$ тогда и только тогда, когда верны равенства $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ и $Ap + Bq + Cr = 0$;

б) $L \parallel \tau$ тогда и только тогда, когда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ и $Ap + Bq + Cr = 0$;

в) $L \perp \tau$ тогда и только тогда, когда $A/p = B/q = C/r$;

г) $\sin(L, \tau) = \frac{Ap + Bq + Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{p^2+q^2+r^2}}$.

**Замечание 8.3.** Пространство без прямой является связным (т.е. любые две точки можно соединить непрерывной кривой), но не односвязным множеством (односвязность пространственного тела $D$ – любая замкнутая петля, лежащая в $D$, стягиваема в точку).

*Расстояние от точки $Q(x,y,z)$ до прямой $L$*, вычисляется по формуле

$$d(Q,L)=\frac{|((x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k})\times(p\mathbf{i}+q\mathbf{j}+r\mathbf{k})|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ q & r\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & z-z_0 \\ p & r\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ p & q\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

*Доказательство.* Кроме точки $P$ возьмем и точку $R := P+\mathbf{a}$ на прямой $L$. Три точки $P$, $Q$ и $R$ достроим до параллелограмма, площадь которого с одной стороны равна $d(Q,L)\cdot|\mathbf{a}|$, а с другой стороны та же площадь равна $\left|\overrightarrow{PQ}\times\mathbf{a}\right|$. Отсюда следует, что

$$d(Q,L)=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\mathbf{a}\right|}{|\mathbf{a}|},$$

что и дает искомую формулу. □

## VIII.4. Задачи

**8.4.** Найти уравнение биссектрисы треугольника $A(-1;3)$,$B(1;8)$, $C(4;5)$, опущенной из вершины $A$

**8.5.** Медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Доказать.

**8.6.** Высоты в треугольнике пересекаются в одной точке. Доказать.

**8.7.** Найти уравнение общего перпендикуляра к прямым $L_1: x=2+t;\ y=-1-t;\ z=5+2t;\ L_2: x=3+3t;\ y=t;\ z=2-t.$

**8.8.** Найти проекцию точки $P(-2;3;1)$ на плоскость $\tau: 3x-y+5z=2$.

**8.9.** Найти проекцию точки $P(-2;3;1)$ на прямую $L: x=2+t;\ y=-1-t;\ z=5+2t.$

**8.10.** В четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4=\{(x,y,z,t)\}$ найти две плоскости (задаются линейной системой $2\times4$), пересечение которых – точка.

# ЛЕКЦИЯ IX
## Кривые второго порядка

Кривая на плоскости, заданная уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{9.1}$$

где $(A; B; C) \neq (0; 0; 0)$, называется кривой второго порядка. Эта кривая называется *невырожденной*, если

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \neq 0.$$

Например, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ – невырожденная кривая второго порядка, но на <u>вещественной</u> декартовой плоскости это уравнение задает пустое множество. Невырожденные и непустые кривые второго порядка суть эллипсы, гиперболы, параболы. Отметим их наиболее простые (канонические) уравнения и свойства.

**Эллипс** – геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек есть величина постоянная (см. рис. 12). Две точки, о которых идёт речь в определении эллипса, называются *фокусами эллипса*, расстояние между ними называется *фокальным расстоянием.* Обозначим половину фокального расстояния через $c$, а половину суммы от точки на эллипсе до фокусов обозначим $a$. Эта величина называется большой полуосью. Заметим, что случай $c = 0$ не исключается, он приводит к окружности радиуса $a$. Выберем систему координат на плоскости так, что точки $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0)$ – фокусы эллипса. Обозначим также $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Это длина малой полуоси эллипса. Очевидно, что $0 < b \leq a$. Тогда каноническое уравнение эллипса будет следующее

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9.2}$$

Докажем этот факт. Пусть $P(x, y)$ – точка на эллипсе. Тогда

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow$$

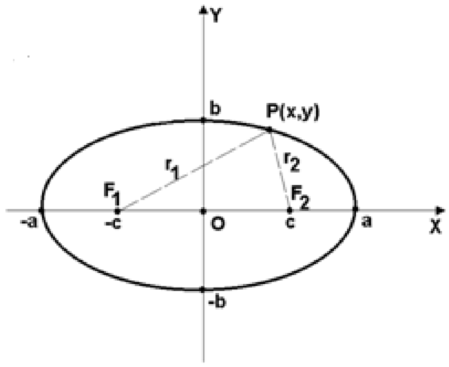



Рис. 12: Эллипс

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$-4xc+4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad a^4-2xca^2+x^2c^2=a^2(x-c)^2+a^2y^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$a^4-a^2c^2=(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Величину $e=c/a$ называют *эксцентриситетом.* Ясно, что $0\le e<1$ для эллипса, и, чем ближе $e$ к 1, тем более сплюснут эллипс. Более точно, эллипс (9.2) получается из окружности $x^2+y^2=a^2$ сжатием по оси $Oy$ в $a/b$ раз, т.е. точка $(x,y)$ лежит на окружности $x^2+y^2=a^2$ тогда и только тогда, когда точка $(x,ky)$, где $k=b/a$, лежит на эллипсе (9.2). Отсюда, в частности, следует, что площадь эллипса равна $k\cdot\pi a^2=\pi ab$. Точки $(\pm a,0)$, $(0,\pm b)$ называются вершинами эллипса. Эллипс (9.2) симметричен относительно координатных осей. Алгебраически это значит, что левая часть соотношения (9.2) не меняется при замене $x$ на $-x$ и при замене $y$ на $-y$.

Расстояния $r_1=|PF_1|$ и $r_2=|PF_2|$ называются *фокальными радиусами* (если $a=b$, то они совпадают с радиусом окружности). Можно доказать, что $r_1=a+ex$, $r_2=a-ex$.

**Гипербола** – геометрическое место точек на плоскости, модуль разности расстояний которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная, обозначаемая, как и выше, через $2a$ (см. рис. 13). Так же, как для эллипса, обозначим через $c$ – половину фокального расстояния. Но для гиперболы $c>a$; поэтому определена величина $b=\sqrt{c^2-a^2}$. Расположим фокусы гиперболы в точках $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Тогда каноническое уравнение гиперболы будет такое:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

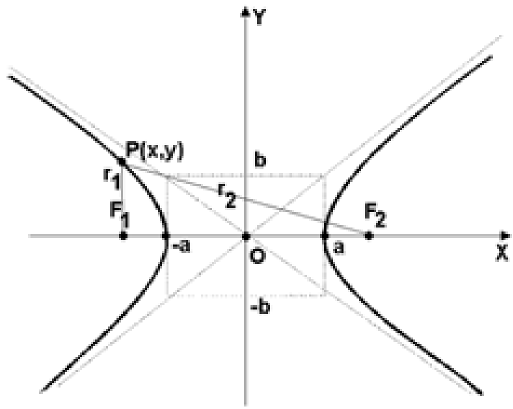



Рис. 13: Гипербола

Эксцентриситет для гиперболы определяется также, как и для эллипса: $e = c/a$, но он уже больше 1, и, чем ближе к 1, тем более сплюснута гипербола. Гипербола, в отличии от эллипса, неограниченная линия на плоскости. Она имеет пару асимптот: $y = \pm\frac{b}{a}x$. Координатные оси являются осями симметрии гиперболы. Если $a = b$, то гипербола называется *равнобочной*. В координатах, $x' = (x - y)/\sqrt{2}$, $y' = (x + y)/\sqrt{2}$, повернутых относительно канонических координат $Oxy$ на $45^0$, уравнение равнобочной гиперболы приобретает вид $x'y' = 2a^2$ или $y' = \frac{k}{x'}$ – известная функциональная обратно пропорциональная зависимость. Мы видим, что гипербола имеет две ветви – левую и правую. Пусть $P(x, y)$ – точка на гиперболе. Расстояния $r_1 = |PF_1|$ и $r_2 = |PF_2|$ называются фокальными. Можно доказать, что $r_1 = -a - ex$, $r_2 = a - ex$ при $x < 0$ и $r_1 = a + ex$, $r_2 = -a + ex$ при $x > 0$.

**Парабола** – геометрическое место точек на плоскости, расстояния которых до фиксированной точки (фокус параболы) и до фиксированной прямой (директриса параболы) равны (см. рис. 14). Если обозначить расстояние от фокуса до директрисы через $p$, ($p > 0$ по определению), поместить фокус в точку $F(p/2, 0)$, а директрису отождествить с прямой $x = -p/2$, то каноническое уравнение параболы будет выглядеть так:

$$y^2 = 2px. \tag{9.3}$$

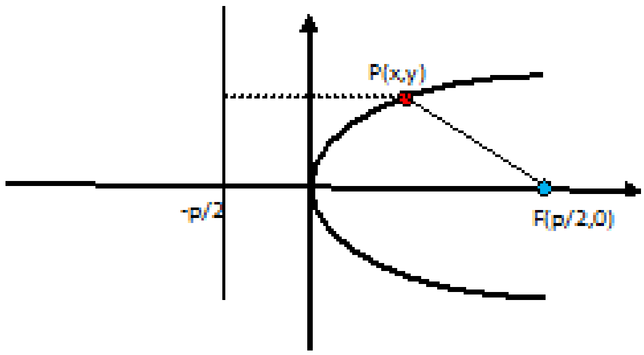



Рис. 14: парабола

Действительно, точка $P(x, y)$ принадлежит параболе в точности тогда, когда

$$x + p/2 = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + px + p^2/4 = (x - p/2)^2 + y^2 \Leftrightarrow 2px = y^2$$

Парабола (9.3) имеет ось $Ox$ своей осью симметрии. Точка $O(0, 0)$, начало координат, будет левой крайней точкой параболы (9.3). Она называется вершиной параболы. У параболы также есть эксцентриситет, он равен 1 и не зависит от $p$.

## IX.1. Общее уравнение кривой второго порядка

Вид общего уравнения (9.1) кривой второго порядка при переходе к другой системе координат не изменяется. Будем приводить общее уравнение к каноническому виду.

*1 этап.* Совершаем поворот на угол $\varphi$ для того, чтобы в новых координатах $Ox'y'$ сделать коэффициент при $x'y'$ равным 0. Это преобразование в точности соответствует задаче диагонализации квадратичной формы $Ax^2+2Bxy+Cy^2$. Подставляя (2.2) с заменой $u$ на $x'$ и $v$ на $y'$, получаем новый вид квадратичной формы $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$:

$$A(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + 2B(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + C(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2$$

откуда

$$\begin{cases} A' = A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi; \\ B' = (C - A)\cos\varphi\sin\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = (C - A)/2\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi; \\ C' = A\sin^2\varphi - 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Тогда $B' = 0$ в том и только том случае, когда $(C-A)/2\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi = 0$. Если $B = 0$, то $\varphi = 0$. Иначе, $\operatorname{ctg} 2\varphi = (A-C)/2B$, $\varphi \in (0; \pi/2)$. Итак, далее считаем, что $B = 0$.

*2 этап.* Совершаем параллельный перенос так, что, если $A \neq 0$, то $D' = 0$ и, если $C \neq 0$, то $E' = 0$. Имеем

$$Ax^2 + 2Dx = A(x + D/A)^2 - D^2/A, Cy^2 + 2Ey = C(y + E/C)^2 - E^2/C$$

т. е. $x' = x + D/A, y' = y + E/C$ в этом случае. Итак, считаем далее, что, если $A \neq 0$, то $D = 0$, и, если $C \neq 0$, то $E = 0$.

*Случай 1.* $AC > 0$. Если надо, меняя знак у всех коэффициентов, сводим к случаю $A > 0$ и $C > 0$. Тогда $Ax^2 + Cy^2 = -F$.

*Подслучай а).* $-F > 0$. Обозначая $a^2 = -F/a, b^2 = -F/C$ приходим к уравнению эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Если $a \geq b$, то это каноническое уравнение. Если же $a < b$, то совершаем поворот на $90^0$, т.е. делаем замену координат $x' = y, y' = -x$ и переобозначаем $a' = b, b' = a$. Получаем каноническое уравнение эллипса в новой системе координат $x'^2/a'^2 + y'^2/b'^2 = 1$.

*Подслучай б).* $-F < 0$. Тогда получаем мнимый эллипс с пустым множеством действительных точек, который задается уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1$.

*Подслучай в).* $F = 0$. Тогда получается пара скрещивающихся мнимых прямых. На действительной плоскости $Oxy$ уравнению $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$ соответствует только начало координат.

*Случай 2.* $AC < 0$. Меняя знак, если надо, считаем, что $A > 0$, $C < 0$.

*Подслучай а)* $F < 0$. Тогда, обозначая $a^2 = -F/A, b^2 = F/C$, приходим к каноническому уравнению гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

*Подслучай б)* $F > 0$. Тогда, совершая поворот на $90^0$, т. е. переходя к координатам $x' = y, y' = -x$ и обозначая $a^2 = -F/C, b^2 = F/A$, приходим к каноническому уравнению гиперболы $x'^2/a^2 - y'^2/b^2 = 1$.

*Подслучай в)* $F = 0$. Обозначая $k^2 = -A/B$, приходим к паре скрещивающихся действительных прямых $k^2x^2 = y^2$, а именно $y = \pm kx$

*Случай 3.* $AC = 0$

*Подслучай а)* $A \neq 0$. Тогда $C = 0$ и мы приходим к уравнению $Ax^2+2Ey+F = 0$. Если $E \neq 0$, то $y = -A/2Ex^2 - F/2E$ – парабола. Если $E = 0$ и $AF > 0$, то приходим к уравнению $x^2 = -k^2$ ($k^2 := F/A$), задающему пару параллельных мнимых прямых. Если $E = 0$ и $AF < 0$, то приходим к уравнению $x^2 = k^2$ ($k^2 := -F/A$), задающему пару параллельных действительных прямых $x = \pm k$. Если $E = F = 0$, то приходим к уравнению $x^2 = 0$, задающему двойную прямую.

*Подслучай б)* $A = 0$. Следовательно, $C \neq 0$. Этот случай исследуется аналогично подслучаю а).

**Теорема 9.1.** *Существует декартова система координат на плоскости, в которой уравнение (9.1) принимает один из следующих видов.*

*а) Каноническое уравнение эллипса, где $a \geq b > 0$ – полуоси, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – половина фокального расстояния. В частности, если $a = b$, то получаем уравнение окружности радиуса $a$ с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = a^2$.*

*б) Гипербола с каноническим уравнением, где $a, b > 0$ – полуоси, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – половина расстояния между фокусами.*

*в) Парабола с каноническим уравнением $y^2 = 2px$, где $p > 0$.*

*г) Мнимый эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1$, задающий пустое множество точек.*

*д) Пара пересекающихся прямых: $x^2 - k^2y^2 = 0$.*

*е) Пара параллельных прямых – $x^2 = a^2$, $a > 0$.*

*ж) Двойная прямая – $x^2 = 0$.*

*з) Пара скрещивающихся мнимых прямых (на декартовой плоскости уравнению соответствует точка) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$.*

## IX.2. Уравнение эллипса, гиперболы, параболы в полярных координатах

Уравнение

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi} \tag{9.4}$$

в полярных координатах $(r, \varphi)$, где $p > 0$ задает:

эллипс, в случае $0 \leq e < 1$ (случай $e = 0$ соответствует окружности радиуса $p$);

гиперболу, в случае $e > 1$;

параболу, в случае $e = 1$.

При этом начало полярной системы координат находится в одном из фокусов кривой. Проверим это в случае $e = 1$. Подставляя в (9.4) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = x/r$ получаем $r(1-y/r) = p$ или $\sqrt{x^2 + y^2} = p+x$. Возводя в квадрат, окончательно имеем: $y^2 = p^2 + 2px$ – уравнение параболы с вершиной в точке $(-p/2; 0)$, директрисой $x = -p$ и фокусом в начале $O(0; 0)$.

### IX.3. Задачи

**9.2.** Привести уравнение а) $xy = 2$; б) $x^2 + 2y^2 = 4x$; в) $x^2 - y^2 = 6(x + y)$ к каноническому виду и указать характеристики получившейся кривой.

**9.3.** Доказать, что сечение цилиндра $x^2+y^2+0\cdot z^2 = 1$ плоскостью может быть либо эллипсом, либо парой параллельных прямых, либо двойной прямой.

**9.4.** Доказать, что сечение (двустороннего) конуса $z^2 = x^2 + y^2$ плоскостью может быть любой из кривых второго порядка (в том числе и вырожденных).

**9.5.** Доказать фокальное свойство эллипса: фокальные радиусы точки $P$, лежащей на эллипсе, образуют с касательной к эллипсу в точке $P$ равные углы.

**9.6.** Вывести формулу фокальных радиусов для эллипса и для гиперболы.

**9.7.** Доказать, что при помешивании чая в круглом стакане, поверхность воды приобретает вид параболоида вращения с каноническим уравнением $z = \frac{x^2+y^2}{a^2}$.

**9.8.** Найти параболу, проходящую через точки $A(0; 1)$, $D(1; 3)$, $C(2; 7)$.

# ЛЕКЦИЯ X
## Функции

Пусть $X$ – некоторое множество. Под функцией, заданной на множестве $X$, будем понимать правило $f$, в силу которого каждому элементу $x \in X$ ($x$ называется *аргументом*) ставится в соответствие число $y = f(x)$ (*значение функции*). Множество $X$ называется областью допустимых значений функции $f$ и обозначается ОДЗ($f$). Правило, о котором говорится в определении, может быть выражено каким-либо аналитическим выражением (формулой), например, $y = 3x^2 - x + 7$, $y = \sin 2x$ и т.д. По умолчанию, в этом случае под ОДЗ($f$) понимается совокупность <u>всех</u> чисел, которые можно подставить в аналитическое выражение $f$ и получить результат. Например, ОДЗ($1/x$)$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ОДЗ($\ln x$)$= (0; +\infty)$.

Функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ можно складывать, умножать на числа, умножать между собой и делить, если знаменатель $\neq 0$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x); \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Опишем *графический способ задания функции*. Пусть на декартовой плоскости $Oxy$ задана кривая $\gamma$, и для каждой точки $x_0 \in (a; b)$ вертикальная прямая $x = x_0$ пересекает кривую $\gamma$ в единственной точке $P(x_0, y_0)$. Тогда получаем правило, сопоставляющее любому числу $x_0 \in (a; b)$ значение $y_0$. Это и будет функцией, заданной графически.

*Графиком функции* $f$ называется кривая $GRAPH(f)$ на декартовой плоскости $Oxy$, состоящая из точек $P(x, f(x))$, где $x$ пробегает ОДЗ функции $f$:

$$GRAPH(f) = \{P(x, f(x)) \mid x \in \text{ОДЗ}(f)\}.$$

Например, графиком *тождественной функции* $y = x$ является биссектриса первого и третьего квадрантов, а графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ с ОДЗ, равным отрезку $[-1; 1]$, является верхняя единичная полуокружность.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на интервале $(a; b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$ с условием $x_1 \leq x_2$ следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)$. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на интервале $(a; b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a; b)$ с условием $x_1 \leq x_2$ следует, что $f(x_1) \geq f(x_2)$. Функция

$y = f(x)$ называется *монотонной* на интервале $(a; b)$, если она либо возрастающая, либо убывающая. Например, функция $\ln x$ строго возрастает, а функция $\log_{0.5} x$ строго убывает на всем своём ОДЗ. Функция $y = \operatorname{tg} x$ не является возрастающей на своём ОДЗ, равным $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, но она строго возрастает на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Парабола $y = x^2$ убывает на интервале $(-\infty; 0)$ и возрастает на интервале $(0; +\infty)$, что доказывается непосредственно. Однако в общем случае интервалы возрастания и убывания функции находятся с помощью производной (Лекция XVII).

Пусть $y = f(x)$ и $z = g(y)$ – две функции, причем значение $f(x)$ попадает в ОДЗ второй функции, какое бы $x \in$ ОДЗ$(f)$ мы ни взяли. Тогда первую функцию можно подставить во вторую: $z = g(f(x))$. Например, если $y = x^2$, $z = 3y + 2$, то $z(x) = 3x^2 + 2$. Допуская некоторую вольность, подобные подстановки делают для функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и получают функцию $y = f(g(x))$, а можно и $g(f(x))$, или $f(f(x))$, или $g(g(x))$. Для функций $f(x) := x^2$, $g(x) := 3x + 2$ получим

$$f(g(x)) = (3x + 2)^2,\ g(f(x)) = 3x^2 + 2,\ f(f(x)) = x^4,\ g(g(x)) = 9x + 8.$$

Пусть функция $y = f(x)$ отображает интервал $(a; b)$ на интервал $(c; d)$ так, что для каждого значения $y_0 \in (c; d)$ найдется лишь одно число $x_0 \in (a; b)$ такое, что $f(x_0) = y_0$. В этом случае можно построить *обратную функцию* $g : (c; d) \to (a; b)$, которая сопоставляет числу $y \in (c; d)$ то число $x \in (a; b)$, для которого $f(x) = y$. По-другому говоря, мы решаем уравнение $y = f(x)$ относительно $x$, выражаем $x$ через $y$ (если это возможно сделать однозначно) и получаем обратную функцию $x = g(y)$. Далее мы, следуя привычке, меняем местами буквы $x$ и $y$, и функцию $y = g(x)$ также называем обратной к функции $y = f(x)$. Заметим, что если функция $y = f(x)$ строго монотонно отображает интервал $(a; b)$ <u>на</u> интервал $(c; d)$ (т.е. $f(a; b) = (c; d)$), то обратная функции заведомо существует.

Построим обратную функцию для функции $y = x^2$. Однозначно выразить $x$ через $y$ здесь не удастся; например числу $y = 4$ соответствую две точки $\pm 2$, значения в которых равно 4. Однако, если функцию $y = x^2$ рассмотреть лишь на полуинтервале $[0; +\infty)$, т.е. вместо естественной ОДЗ, равной $\mathbb{R}$, взять только неотрицательные числа $[0; +\infty)$, то однозначная разрешимость имеет место, и мы получаем обратную функцию $x = \sqrt{y}$, которую затем более привычно обозначаем $y = \sqrt{x}$.

## Основные элементарные функции

1) Степенная функция $y = x^\alpha$ (см. графики на рис. 15). Частные случаи $\alpha = 1, 2, 3, -1, 1/2$:

$$x; \quad x^2; \quad x^3; \quad \sqrt{x}; \quad \frac{1}{x}; \quad \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

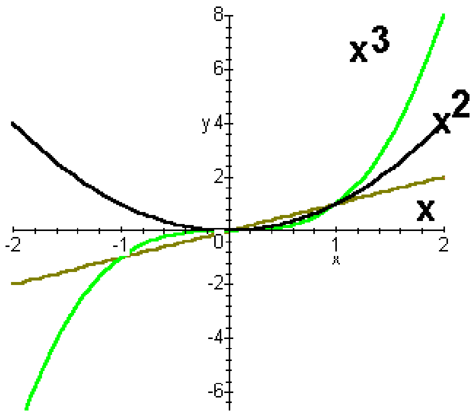



Рис. 15: Степенные функции

2) Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. Частный случай $y = e^x$, эту функцию обозначают также как $\exp(x)$.

3) Логарифмические функции $y = \log_a x$. Частный случай – натуральный логарифм $y = \ln x$.

4) Тригонометрические функции $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$.

5) Обратные тригонометрические функции $\arcsin x, \operatorname{arctg} x$ (см. рис. 16).

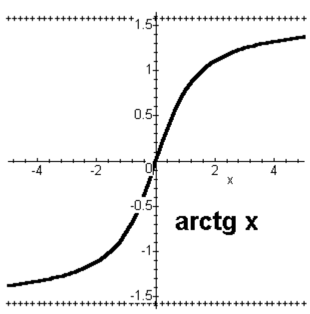



Рис. 16: Арктангенс

Функция называется *элементарной*, если она может быть получена из перечисленных выше основных элементарных функций действиями сложения, вычитания, умножения, деления и подстановкой функции в функцию. Так, например, $|x| = \sqrt{x^2}$, $\operatorname{sgn} x = \frac{|x|}{x}$, $x^x = e^{x \ln x}$ – элементарные функции. Однако существуют очень важные функции, не являющиеся элементарными. Таковыми, например, являются функция ошибок и интегральный синус:

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2)\, dt; \quad \operatorname{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Если и их включить в набор «основных», то, конечно, придем к более обширному классу функций.

Естественной ОДЗ аналитического выражения $f(x)$ называется совокупность всех чисел, при которых все операции, входящие в аналитическое выражение, определены, и получается итоговый результат – $y = f(x)$.

## X.1. Показательные и логарифмические функции

Определение показательной функции $a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ – фиксированное основание, формулируется поэтапно: сначала для натурального и нулевого $x$, затем для отрицательных целых чисел, потом для дробей вида $x = 1/n, n \in \mathbb{N}$, далее для рационального $x$ и, наконец, для произвольного вещественного числа. При этом ограничения на основание $a$ меняются:

$$a^0 := 1 \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0); \quad a^1 := a \text{ и } a^{n+1} = a^n \cdot a \quad (a \in \mathbb{R});$$

$$a^{-n} := 1/a^n \quad (a \neq 0);$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}; \quad a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (a \geq 0);$$

Здесь $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. В связи с последним определением заметим, что $x^{1/3}$ и $\sqrt[3]{x}$ – разные функции; первая определена лишь для неотрицательных $x$, а вторая – для любых вещественных $x$. (Если, вопреки сказанному, положить $(-1)^{1/3} = -1$, то приходим к противоречию: $1 = (-1)^{2/6} = (-1)^{1/3} = -1$).

Свойства степеней таковы:

- (основное функциональное свойство) $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$;
- $a^{x_1-x_2} = a^{x_1}/a^{x_2}$ , в частности $a^{-x} = 1/a^x$;

- $(a^x)^k = a^{kx}$;
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $(a/b)^x = a^x/b^x$;
- если $a > 1$, то $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ и $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$; если же $0 < a < 1$, то $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ и $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Эти свойства сначала доказываются для целых показателей, а затем для рациональных показателей. Доказательства при этом чисто алгебраические, без использования предела (кроме последнего свойства). В связи с последним свойством заметим, что можно доопределить операции с бесконечностью, полагая для $a > 1$

$$a^{+\infty} = +\infty; \quad a^{-\infty} = 0,$$

а для $0 < a < 1$ наоборот

$$a^{-\infty} = +\infty; \quad a^{+\infty} = 0.$$

Операции $1^{\pm\infty}$ остаются неопределенными.

**Теорема 10.1.** *Для всякого положительного числа $a$, не равного единице, имеется единственная строго монотонная функция $a^x$, удовлетворяющая перечисленным выше свойствам и совпадающая с $(\sqrt[n]{a})^m$ для рационального $x = m/n$. Она задается как предел степеней с рациональными показателями*

$$a^x = \lim_{q\to x, q\in\mathbb{Q}} a^q.$$

Функцию $y = a^x$ при $a > 0, a \neq 1$ называют *показательной*. При $a > 1$ она возрастающая, а при $0 < a < 1$ – убывающая.

Функция $y = a^x$ в виду строгой монотонности имеет обратную функцию $x = \log_a y$. Более точно: пусть $a > 0, a \neq 1$ и $b > 0$, в этом случае, по определению, равенство $c := \log_a b$ означает, что $a^c = b$. Функция $y = \log_a x$ называется *логарифмической*. Ее область определения совпадет с множеством положительных чисел. График экспоненты см. на рис. 17. График функции $y = \ln x$ получается из экспоненты отражением относительно биссектрисы $y = x$ первого квадранта.

Свойства логарифмической функции следующие:

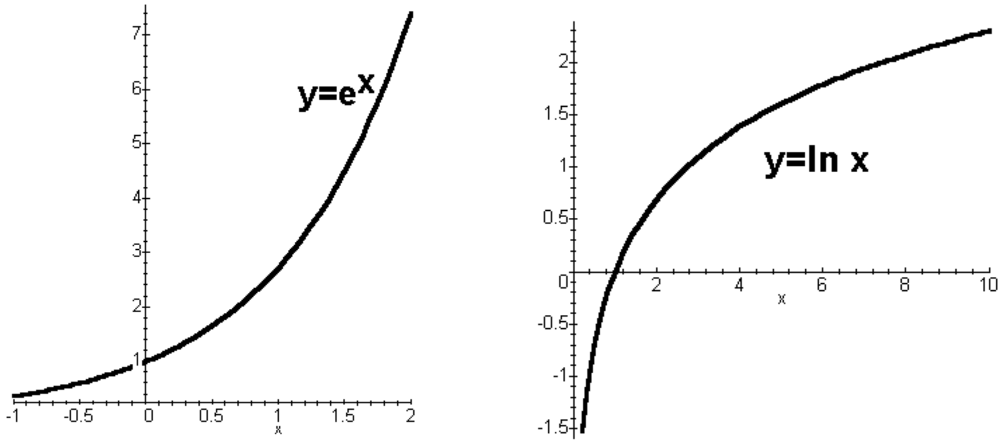



Рис. 17: Экспонента и натуральный логарифм

$$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad \text{(основное свойство)}$$
$$\log_a(x_1/x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$
$$\log_a x^k = k\log_a x;\ \log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x \quad (x>0)$$
$$\log_a x^2 = 2\log_a |x| \quad (x \neq 0)$$
$$\log_{ab} \cdot \log_b c = \log_a c$$
$$\log_b a \log_a b = 1; \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$
$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1.$$

Если $a > 1$, то $\log_a(+\infty) = +\infty$ и $\log_a(0+0) = -\infty$; если же $0 < a < 1$, то $\log_a(+\infty) = -\infty$ и $\log_a(0+0) = +\infty$

## X.2. Тригонометрические функции

Пусть $\gamma$ – некоторая кривая с началом $A$ и концом $B$ (например, график функции $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ с концами $A(a;f(a));B(b;f(b))$). Рассмотрим на кривой $\gamma$ точки $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ (обозначим это разбиение кривой как $\xi$), расположенные в порядке продвижения от точки $A$ до точки $B$. Соединим эти точки последовательно отрезками прямых. Получим ломаную $L_\xi$, которая называется вписанной в кривую $\gamma$. *Длиной кривой* $\gamma$ называется наименьшая верхняя грань длин ломаных $L_\xi$, где $\xi$ пробегает всевозможные разбиения кривой $\gamma$.

Рассмотрим единичную полуокружность $x^2 + y^2 = 1$ $(y \geq 0)$, как кривую, заданную функцией $y = \sqrt{1 - x^2}$. Выберем разбиение: $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$. Обозначим: $y_j = \sqrt{1 - x_j^2}$; $\Delta x_{j+1} := x_{j+1} - x_j$; $\Delta y_{j+1} := y_{j+1} - y_j$ $(0 \leq j \leq n-1)$. Тогда длина вписанной ломаной равна $\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}$. Так как

$$\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2} \leq \Delta x_j + \Delta y_j$$

и $\sum_1^n \Delta x_j = x_n - x_0 = 2$, $\sum_1^n \Delta y_j \leq 2$, то длина ломаной $\leq 4$. Следовательно длина полуокружности существует и не превосходит 4.

**Определение 10.2.** *Числом $\pi$ (пи)* называется длина полуокружности единичного радиуса. Приближенное значение: $\pi \approx 3,14$.

Перейдем к определению тригонометрических функций. *Тригонометрической окружностью* назовем окружность, задаваемую уравнением $x^2+y^2 = 1$. Вращение против часовой стрелки назовем положительным, а по часовой стрелке – отрицательным. Пусть задано число $\alpha$. Если $\alpha \geq 0$, то пройдем по тригонометрической окружности от точки $(1;0)$ расстояние, равное $\alpha$, в положительном направлении. Если же $\alpha < 0$, то пройдем расстояние $|\alpha| = -\alpha$ в отрицательном направлении. В итоге приходим в некоторую точку $P_\alpha$. Абсцисса этой точки называется *косинусом числа $\alpha$* и обозначается $\cos\alpha$, а ордината этой точки есть *синус числа $\alpha$* (обозначается $\sin\alpha$). *Тангенс и котангенс* определяются так:

$$\operatorname{tg}\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \ \operatorname{ctg}\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

График синуса, называемый синусоидой, приведен на рис. 18.

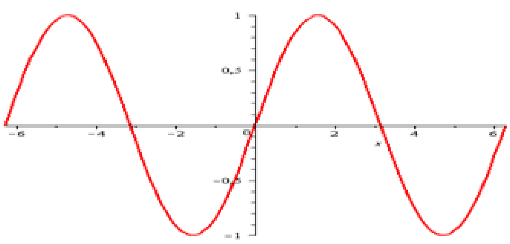



Рис. 18: Синусоида

График косинуса получается из графика синуса сдвигом на $\pi/2$ влево в силу соотношения $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, называется поэтому также синусоидой. График тангенса (тангенсоида) на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ приведен на рис. 19.

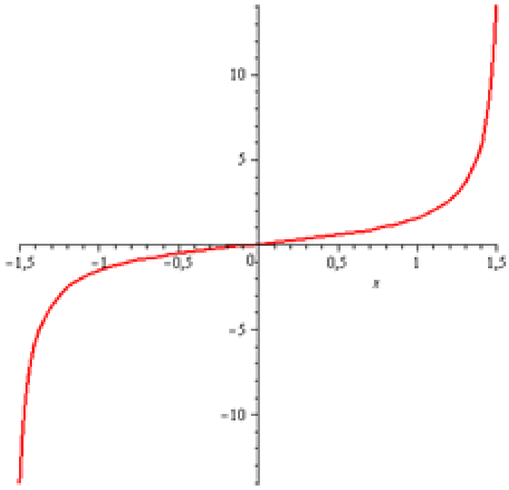



Рис. 19: Тангенсоида

Тангенс строго возрастает на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ и принимает все действительные значения. Приведем определение обратной функций – арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \operatorname{tg}\, y; \\ x \in (-\pi/2; \pi/2). \end{cases}$$

### Свойства тригонометрических функций

**T1**. Основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

**T2.** (Периодичность)

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x; \;\; \cos(x + 2\pi k) = \cos x; \;\; \operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x \;\; (k \in \mathbb{Z})$$

**T3.** (Полупериодичность)

$$\sin(x + \pi) = -\sin x; \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

**T4.**

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x; \;\; \cos(\pi/2 - x) = \sin x;$$
$$\sin(x + \pi/2) = \cos x; \;\; \cos(x + \pi/2) = -\sin x$$

Формулы Т2-Т4 называются *формулами приведения аргумента* к стандартному отрезку $[0; \pi/2]$.

**Т5.** Синус – нечетная функция, а косинус – четная. Тангенс и котангенс – нечетные функции:

$$\sin(-x) = -\sin x,\ \cos(-x) = \cos x,\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

**Т6.** Ограниченность синуса и косинуса: $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$

**Т7**. Основные функциональные соотношения.

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v;\ \cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

Доказательство. Вектора $\mathbf{i} = \overrightarrow{OE}$, $\mathbf{j} = \overrightarrow{OF}$, где $E(1;0), F(0;1)$ образуют стандартный базис на плоскости. Повернем систему координат на угол $u$. Тогда новый стандартный базис запишется через старый следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \cos u\, \mathbf{i} + \sin u\, \mathbf{j}; \\ \mathbf{j}' = -\sin u\, \mathbf{i} + \cos u\, \mathbf{j}. \end{cases} \tag{10.1}$$

Точка $P(\cos(u+v); \sin(u+v))$ определяет вектор $\overrightarrow{OP}$, который запишем в старом и новом стандартных базисах:

$$\overrightarrow{OP} = \cos(u+v)\mathbf{i} + \sin(u+v)\mathbf{j} = \cos v\, \mathbf{i}' + \sin v\, \mathbf{j}'$$

Учитывая (10.1), получаем:

$$\cos(u+v)\mathbf{i} + \sin(u+v)\mathbf{j} = \cos v(\cos u\, \mathbf{i} + \sin u\, \mathbf{j}) + \sin v(-\sin v\, \mathbf{i} + \cos v\, \mathbf{j}),$$

откуда после раскрытия скобок и приравнивания координат получаем требуемое соотношение для синуса и косинуса суммы. Для синуса и косинуса разности следует учесть четность косинуса и нечетность синуса.

**Т8.** Формулы половинного угла:

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u;$$

$$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u = \cos^2 u - \sin^2 u;$$

$$\sin 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg}^2 u};\ \cos 2u = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 u}{1 + \operatorname{tg}^2 u};\ \operatorname{tg} 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u}$$

$$\sin u - \sin v = 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2};\ \cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

$$\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.$$

Все эти тождества получаются из основных функциональных соотношений Т7 простыми алгебраическими манипуляциями.

### X.3. Задачи

**10.3.** Нарисовать графики функций а) $y = 1/2^x$; б) $y = \sqrt[3]{x}$; в) $y = \arcsin x$ и отметить их свойства.

**10.4.** Найти обратную функцию к функции $y = \frac{2x-1}{1+3x}$.

**10.5.** Изобразить графики *гиперболического синуса* $y = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ и *гиперболического косинуса* $y = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Отметить их свойства.

**10.6.** Доказать гиперболические тождества

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \operatorname{sh}\,2x = 2\operatorname{sh}\,x \operatorname{ch}\,x; \quad \operatorname{ch}\,2x = \operatorname{ch}^2\,x + \operatorname{sh}^2\,x$$

# ЛЕКЦИЯ XI
## Предел последовательности

*Последовательностью* называется ряд чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, занумерованный натуральными числами, т.е. фактически это отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, сопоставляющее каждому натуральному числу $n$ действительное число $a_n$. Число $a_n$ называется *n-ым членом* (или *общим членом*) последовательности $(a_n)$. Очень часто он задается аналитическим выражением. Например,

1) $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots$. Здесь $a_n = 1/n$.

2) $1, 1, 1, \ldots$. Здесь $a_n \equiv 1$.

3) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$. Здесь $a_n = (-1)^{n+1}$.

4) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Здесь $u_n = n$.

Если n увеличивать неограничено, то ясно, что последовательность 1) стремится к нулю, 2) стремится к 1, 3) пока не ясно и 4) стремится к бесконечности. Что это в точности значит? Разобраться в этом нам поможет понятие $\varepsilon$-окрестности точки $a$ – это интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ длиной $2\varepsilon$ с центром в точке $a$, который задается неравенством $|x-a| < \varepsilon$. Здесь и далее предполагается $\varepsilon > 0$.

Если $|a_n - a| < \varepsilon$, то $a_n \approx a$ с точностью $\varepsilon$, и, чем меньше $\varepsilon$, тем точнее приближенное равенство.

Число $a$ будет *пределом последовательности* $a_n$, если для любого положительного $\varepsilon$ найдется номер $N$, начиная с которого все члены $a_n$ попадают в $\varepsilon$-окрестность точки $a$, т.е. $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$.

Тот факт, что $a$ есть предел последовательности $(a_n)$, обозначаем так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или даже так: $\lim a_n = a$, поскольку дискретной переменной $n \in \mathbb{N}$ некуда больше стремиться, кроме как к $+\infty$.

Докажем, что $\lim \frac{1}{n} = 0$. Возьмём $\varepsilon > 0$. Неравенство $|1/n - 0| < \varepsilon$ выполнено, если $n > 1/\varepsilon$ . В качестве $N(\varepsilon)$ можно взять $[1/\varepsilon] + 1$ – наименьшее натуральное число, превосходящее $1/\varepsilon$. Здесь через $[x]$ обозначена *целая часть числа* $x$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее $x$.

У последовательности не может быть двух разных пределов. Действительно, если $a \neq a'$ – пределы последовательности $(a_n)$, то, взяв непересекающиеся $\varepsilon$-окрестности точек $a$, $a'$ (для этой цели подходит любое $\varepsilon \leq |a - a'|/2$), получим, что, начиная с некоторого номера, $a_n$ попадает как в первую, так и во вторую $\varepsilon$-окрестность, что несомненно является противоречием.

Среди всех последовательностей своей простотой выделяется *константная последовательность* $a_n \equiv a$ (см. пример 2) выше). Такая последовательность имеет предел, равный $a$, ибо $|a_n - a| = |a - a| = 0$ меньше любого положительного $\varepsilon$, начиная уже с первого номера.

Не любая последовательность имеет предел. Докажем, что последовательность $(-1)^n$ не имеет предела. Действительно, пусть $a$ – предел этой последовательности. Тогда для $\varepsilon = 1$ и достаточно большого $n$ имеют место неравенства $|(-1)^n - a| < 1$ и $|(-1)^{n+1} - a| < 1$. Отсюда $2 = |(1-a) - (-1-a)| \leq |1 - a| + |-1 - a| < 1 + 1 = 2$ – противоречие. Противоречие показывает, что наше предположение о существовании предела ложно, тем самым предела последовательность $(-1)^{n+1}$ не имеет. Однако подпоследовательность с четными номерами, т.е. $-1, -1, -1, \ldots$, имеет предел равный $-1$, а подпоследовательность с нечетными номерами стремится к единице. Продолжим пример и по другому объясним отсутствие предела последовательности $(-1)^{n+1}$. А именно

◀ **11.1.** *Если последовательность имеет предел, равный $a$, то и любая подпоследовательность имеет предел равный $a$.*

Следовательно, если найдены две подпоследовательности, которые пусть и имеют пределы, но разные, тогда исходная последовательность предела не имеет.

Опишем ситуацию, когда можно предсказать существование предела и даже указать каков он должен быть.

**Теорема 11.2.** *Любая монотонно возрастающая, ограниченная сверху последовательность $(u_n)$ имеет предел, и он равен наименьшей из верхних граней множества $\{u_n\}$. Аналогично, любая монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел равный наибольшей нижней грани множества значений этой последовательности.*

*Доказательство.* Пусть $(u_n)$ – монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность. Обозначим $u = \sup\{u_n\}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как число $u - \varepsilon$ не является верхней гранью значений нашей последовательности, то найдется натуральное $N$ такое, что $u - \varepsilon < u_N$. Тогда для любого $n \geq N$ имеем $u - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq u < u + \varepsilon$ в силу монотонности последовательности и того факта, что $u$ – верхняя грань. Отсюда для любого натурального $n \geq N$ следует неравенство $|u_n - u| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. □

Например, докажем, что если $0 \leq a < 1$, то $\lim a^n = 0$. В силу монотонного убывания $a^n$ и ограниченности снизу нулем, предел этой последовательности существует по доказанной теореме. Применяя принцип Архимеда (лекция 1), а именно, что в этом случае величина $a^n$ может быть сделана сколь угодно малой, получаем $0 = \inf\{a^n\}$.

**Арифметические свойства предела.**

Поскольку последовательность есть частный случай функции (с областью определения равной $\mathbb{N}$), то их (последовательности) можно складывать, умножать на числа, умножать между собой и делить, если знаменатель $\neq 0$.

Если пределы последовательностей существуют и $u = \lim u_n$, $v = \lim v_n$, то пределы последовательностей $u_n + v_n$, $u_n v_n$, $\lambda u_n$, $u_n/v_n$ также существуют и равны

$$u + v; \quad u \cdot v; \quad \lambda u; \quad u/v \text{ ( предполагаем } v \neq 0)$$

Иными словами, *предел суммы (произведения, частного) двух последовательностей равен сумме (произведению, частному (в случае отличного от нуля знаменателя)) пределов, при условии существования пределов* $\lim u_n$ *и* $\lim v_n$.

Докажем, например, равенство $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = u + v$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем номер $N_1$ такой, что для любого $n \geq N_1$ выполнено неравенство $|u_n - u| < \varepsilon/2$. Аналогично, найдем номер $N_2$ такой, что для любого $n \geq N_2$ выполнено неравенство $|v_n - v| < \varepsilon/2$. Возьмем теперь произвольный номер $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Тогда верны оба неравенства и

$$|(u_n + v_n) - (u + v)| \leq |u_n - u| + |v_n - v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось установить.

Для доказательства аналогичного свойства для произведения требуется ограниченность последовательности, имеющей предел. Вообще, какое-либо множество чисел *ограничено*, если оно помещается в каком-нибудь отрезке числовой оси. Ясно, что конечное множество ограничено, а также ясно, что объединение двух ограниченных множеств – снова ограниченное множество. *Последовательность, имеющая предел, ограничена.* В самом деле, если $u = \lim u_n$, то взяв $\varepsilon = 1$ (подойдет любое положительное число вместо единицы) и найдя $N$ такое, что $|u_n - u| < 1$ для любого $n \geq N$, мы получаем, что множество $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ лежит в объединении двух ограниченных множеств – $\{u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}\}$ и $[u-1; u+1]$, тем самым оно ограничено.

Отметим некоторые предельные переходы в неравенствах

**А.***Если $u_n \geq 0$ при любом $n$, то и $\lim u_n \geq 0$ (при условии существования предела). Аналогично свойство имеет место для неравенства "$\leq$ ".*

Строгий вариант этого свойства не имеет места. Действительно, $1/n > 0$ при любом $n$, однако $\lim 1/n = 0$.

**Б.** Как следствие предыдущего свойства получаем монотонность предела: *предположим, что $u_n \geq v_n$ для любого $n$. Тогда и $\lim u_n \geq \lim v_n$ при условии существования этих пределов.*

Действительно, достаточно применить свойство А к разности $u_n - v_n$.

Строгие доказательства всех свойств предела числовой последовательности мы получим (Лекция 13) как частный случай свойств предела функции.

### XI.1. Число e.

**Теорема 11.3.** *Предел последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ существует и заключен между числами 2 и 3.*

Убедимся прямым вычислением, что последовательность $u_n = (1 + 1/n)^n$ монотонно и даже строго возрастает и ограничена сверху числом 3:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 2 | $9/4$ | $64/27$ | $625/256$ | ... |

Итак, последовательность $u_n$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом 3, следовательно по теореме 11.2 эта последовательность имеет предел, причем он меньше либо равен 3 по свойству Б. Так как $u_n > 2$, то предел больше либо равен 2 согласно тому же свойству.

Приведем строгое доказательство существования числа $e$. Используя бином Ньютона, получим:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots$$

$$\cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}$$

При переходе к следующему члену последовательности каждый из сомножителей $(1 - \frac{k}{n})$ в правой части увеличивается, а, кроме того, добавляется еще одно $n+2$-е слагаемое. Итак, доказано, что $u_n < u_{n+1}$, т.е. последовательность $\{u_n\}$ монотонно возрастает. Далее, если ограничить сверху каждый из сомножителей $(1 - \frac{k}{n})$ единицей, а $\frac{1}{k!}$ ограничить сверху $\frac{1}{2^{k-1}}$, то

$$\begin{aligned} u_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} &\le 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \le \\ &\le 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} \le \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\le 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Итак, последовательность $u_n$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом 3, следовательно по теореме 11.2 эта последовательность имеет предел.

**Определение 11.4.** Предел последовательности $(1 + 1/n)^n$ обозначают $e$ и называют *основанием натуральных логарифмов* или *числом $e$*.

Значение $e = 2,718281828...$ (1828 – год рождения Льва Николаевича Толстого, но он к числу е не имеет никакого отношения, зато имеет прямое отношение к роману "Война и мир"). Чаще всего пользуются приближением $e \approx 2,7$.

## XI.2. Ряды

Чрезвычайно употребительной разновидностью предела последовательности является сумма ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots , \tag{11.1}$$

по другому обозначаемая как $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ и понимаемая как предел *частичных сумм* $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Итак, суммой ряда (11.1) называется число $s$ такое, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от $\varepsilon$, и такой, что при любом натуральном $n \geq N$ имеет место неравенство $|s - s_n| < \varepsilon$. Если у ряда существует сумма, то он называется *сходящимся*; в противном случае ряд называется *расходящимся*.

Рассмотрим ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$. Общий член его задается формулой $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Частичную сумму этого ряда оказывается также можно "свернуть", для чего надо прибавить к ней последнее слагаемое $\frac{1}{2^{n-1}}$, и процесс сложения следует начинать с конца:

$$s_n + \frac{1}{2^{n-1}} = s_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$s_{n-1} + \frac{1}{2^{n-2}} = s_{n-2} + \frac{1}{2^{n-3}} = \ldots = s_1 + 1 = 2.$$

Итак, $s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$, откуда следует, что ряд сходится к числу 2.

Разобранный пример представляет собой частный случай геометрической прогрессии, которая определяется как ряд вида

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots \quad (a \neq 0). \tag{11.2}$$

Итак, ненулевой ряд, у которого каждый последующий член получается из предыдущего умножением на фиксированное число, называется *геометрической прогрессией*. Число $q$ называется *знаменателем геометрической прогрессии*. Для любого числа $q \neq 1$ справедливо равенство

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \tag{11.3}$$

которое вытекает из несомненно верного соотношения

$$(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})(1 - q) = 1 - q^n$$

(следует раскрыть скобки и сократить все, что сокращается). Тогда для геометрической прогрессии частичная сумма "сворачивается" таким образом:

$$s_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

Величина $q^n$ имеет нулевой предел в том и только том случае, когда $|q| < 1$; случай $q = 1$ мы исключили, а в остальных случаях последовательность $q^n$ предела не имеет.

Отдельно рассмотрим случай, когда знаменатель геометрической прогрессии равен единице. Тогда прямой подсчет дает выражение $s_n = na$ (кстати, совпадающего с пределом $\lim_{q\to 1} a\frac{1-q^n}{1-q}$), и мы получаем расходимость, ибо $a \neq 0$. Доказана следующая теорема.

**Теорема 11.5.** *Геометрическая прогрессия сходится тогда и только тогда, когда ее знаменатель $q$ по модулю меньше единицы. В этом случае сумма геометрической прогрессии равна $\frac{a}{1-q}$.*

◀ **11.6.** *Имеет место равенство:*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Для доказательства воспользуемся оценкой теоремы 11.3, из которой извлекаем неравенство

$$(1 + 1/n)^n \leq \sum_{k=0}^{n} 1/k!.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем $e \leq \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$. С другой стороны,

$$(1+1/n)^n \geq 1+1+(1-1/n)1/2!+\cdots+(1-1/n)(1-2/n)...(1-(k-1)/n)1/k!,$$

где мы берем лишь $k+1$ слагаемых в разложении по формуле бинома Ньютона. Фиксируя $k$ и устремляя $n \to \infty$, получаем, что $e \geq \sum_{n=0}^{k} 1/n!$. Если теперь в этом неравенстве перейти к пределу $k \to \infty$, то получаем оценку $e \geq \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$. Два противоположных неравенства возможны лишь в случае совпадения: $e = \sum_{n=0}^{k} 1/n!$. □

**Замечание 11.7.** Сумма $1+1+1/2+1/6+1/24+1/120+1/720 \approx 2,7181$ дает три верных знака после запятой числа e, в виду следующей оценки остатка:

$$1/7! + 1/8! + \cdots \leq 1/7!(1 + 1/8 + 1/8^2 + \cdots) = 1/4410.$$

## XI.3. Задачи

**11.8.** Найти предел последовательности а) $\frac{(2n+3)^5}{n^5+1}$; б) $\sqrt{n+a} - \sqrt{n}$; в) $\sqrt[n]{n}$

**11.9.** При каких значениях параметра $a$ последовательность $\sin an$ имеет предел.

**11.10** (критерий Коши)**.** Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N$ такой, что при любых $n, m \geq N$ имеет место неравенство $|u_n - u_m| < \varepsilon$, то последовательность $(u_n)$ имеет предел.

**11.11.** Показать, что критерий Коши не выполняется для поля рациональных чисел.

**11.12.** Если последовательность $(u_n)$ сходится к $u$, то и последовательность средних арифметических $\frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$ сходится к числу $u$.

**11.13.** Будем в кольце $\mathbb{Z}$ считать число тем меньше, чем на большую степень двойки оно делится. Формально, если $z = 2^t m$, где $2 \nmid m$, то $2^{-t}$ есть абсолютное значение числа $z$. Доказать, что в этом случае $1+2+4+8+16+\cdots = -1$.

# ЛЕКЦИЯ XII
# Предел функции

Формальное определение предела функции предварим примером. Составим таблицу значений функции $\frac{x^2-4}{x-2}$ при $x \to 2$:

| $x$ | 1.9 | 1.95 | 1.98 | 1.99 | 1.999 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x^2-4}{x-2}$ | 3.9 | 3.95 | 3.98 | 3.99 | 3.999 | ... |

Заметим, что значение $x = 2$ мы подставить не можем, так как получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Тем не менее понятно, что значения функции $\frac{x^2-4}{x-2}$ приближаются к числу 4 по мере того, как значения аргумента приближаются к 2. Это станет совершенно очевидно после сокращения $(x^2-4)/(x-2) = x+2$. Правая часть здесь уже определена при $x = 2$ и имеет значение 4. Иными словами, простым алгебраическим преобразованием мы раскрыли неопределенность 0/0 и вычислили предел функции $(x^2-4)/(x-2)$ при $x \to 2$.

Рассмотрим еще один пример: вычислим предел $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$. Преобразуем

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

При неограниченном увеличении аргумента $x$ знаменатель $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ становиться больше, чем любое наперед заданное число. Следовательно, получаем нулевое значение предела.

Под *окрестностью точки* $a \in \mathbb{R}$ понимаем любой интервал $U$, содержащий точку $a$. Можно рассматривать стандартную $\delta$-окрестностью точки $a$ (здесь $\delta > 0$) – интервал $(a-\delta, a+\delta)$. Окрестности существуют и для бесконечности. Под окрестностью $+\infty$ понимается интервал $(C; +\infty)$, а окрестность $-\infty$ это интервал $(-\infty; C)$. Заметим, что пересечение двух окрестностей точки снова будет окрестностью этой точки. Множество $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ называют *проколотой окрестностью точки* $a$. Она задается неравенствами $0 < |x-a| < \delta$.

Пусть точка $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ является *предельной для ОДЗ* функции $f(x)$. Это значит, что в любой окрестности точки $a$ найдется число, принадлежащее ОДЗ функции $f$ и отличное от $a$. В этой ситуации, число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x$ стремящемся к $a$, если, чем ближе подходит $x$ к $a$, тем меньше значение функции $f(x)$ отличается от своего предела. Что означает фраза "чем ближе $x$ подходит к $a$"? Мерой близости $x$ и $a$ можно считать модуль разности $|x-a|$. Однако мы не допускаем равенства $x=a$, ибо функция $f(x)$ может быть неопределенной в точке $a$. Перейдем к строгому определению предела функции.

**Определение 12.1.** Пусть $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ – предельная точка ОДЗ функции $f(x)$. Обозначим это ОДЗ символом $D$.

Число $A$ называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x$ *стремящимся к* $a$, если для любого положительного $\varepsilon$, сколь бы мало оно ни было, найдется окрестность $U$ точки $a$ (зависящая от $\varepsilon$) такая, что $|f(x)-A| < \varepsilon$ для любого $x \in U \cap D$, не совпадающего с $a$.

Предел, определенный выше обозначаем как $\lim\limits_{x\to a, x\in D} f(x)$.

Это определение уточним в зависимости от следующих ситуаций: 1) функция $f$ определена в проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$; 2) функция $f(x)$ определена в правой половине проколотой окрестности, т.е. на интервале $(a; a+\delta)$; 3) функция $f(x)$ определена в левой половине проколотой окрестности, т.е. на интервале $(a-\delta; a)$; 4) $a = \pm\infty$ и функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

1) Пусть функция $f$ определена в проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Число $A$ называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to a$, если для любого положительного $\varepsilon$, сколь бы мало оно ни было, найдется число $\delta > 0$ (зависящее от $\varepsilon$) такое, что $|f(x)-A| < \varepsilon$ для всех $x$ таких, что $0 < |x-a| < \delta$.

Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ записывают как $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Формально,

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ (\forall x)\, 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)-A| < \varepsilon.$$

Например, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+3}{x+1} = 2$, так как неравенство $\left|\frac{x+3}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$ (*) выполняется для всех $x$ таких, что $|x-1| < \varepsilon$, т.е. в данном случае $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Действительно, неравенство (*) после приведения к общему знаменателю и умножению на $|x+1|$ эквивалентно следующему неравенству: $|x-1| < \varepsilon\, |x+1|$. А это верно, ибо $1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$ влечет $x + 1 > 2 - \varepsilon$, откуда

$$\varepsilon\,|x+1| > \varepsilon(2-\varepsilon) = 2\varepsilon - \varepsilon^2 > \varepsilon > |x-1|\,.$$

(Неравенство $2\varepsilon - \varepsilon^2 > \varepsilon$ выполнено, если $\varepsilon < 1$).

2) Пусть функция $f$ определена (или рассматривается по каким-либо причинам) справа от точки $a$, т.е. на интервале $(a; a+\delta_0)$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Число $A$ называется *пределом функции $f(x)$ при $x$ стремящемся к $a$ справа*, если для любого положительного $\varepsilon$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x$ таких, что $a < x < a + \delta$. Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ справа записывают как $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Например, функция знака $y = \operatorname{sgn} x$ хотя и определена всюду, кроме нуля, может быть рассматриваема лишь на интервале $(0; +\infty)$. Тогда эта функция совпадает с константой, равной 1, и $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$.

3) Пусть функция $f$ определена слева от точки $a$, т.е. на интервале $(a - \delta_0; a)$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x$ стремящемся к $a$ слева (записываем как $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$), если для любого положительного $\varepsilon$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x$ таких, что $a - \delta < x < a$.

Аналогично, функция знака $y = \operatorname{sgn} x$ может быть рассматриваема лишь на интервале $(-\infty; 0)$. Тогда эта функция совпадает с константой, равной $-1$, и $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x = -1$. Как мы видим, для этой функции односторонние пределы в нуле не совпадают. Это значит, что "двустороннего" предела, в смысле п. 1) функция $\operatorname{sgn} x$ в нуле не имеет.

◀ **12.2.** *Пусть функция определена в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Предел функции существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела, причем они совпадают. В этом случае предел функции совпадет с односторонними пределами.* □

4) Пусть теперь $a = +\infty$ и функция определена в окрестности бесконечности. Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ , если для любого положительного $\varepsilon$ найдется число $C$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x > C$. Предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ записывают как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Аналогично, если функция $f$ определена в окрестности $-\infty$, то число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ ($A = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$), если для любого положительного $\varepsilon$ найдется число $C$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x < C$.

Например, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$. Действительно, неравенство $|1/x - 0| < \varepsilon$ выполняется для всех $|x| > 1/\varepsilon$, т.е. для всех $x > 1/\varepsilon$ также, как и для всех $x < -1/\varepsilon$.

Зачастую несобственные величины $\pm\infty$ удобно рассматривать в качестве возможных значений предела. Говорим, что $\lim\limits_{x\to a, x\in D} f(x) = +\infty$ (по-прежнему, $D =$ ОДЗ$\,(f)$), если для любого числа $M$, сколь угодно большого, найдется окрестность $U$ точки $a$ такая, что $f(x) > M$ для всех $x \in U \cap D \setminus \{a\}$. Аналогично, $\lim_{x\to a, x\in D} f(x) = -\infty$, если для любого числа $M$ найдется окрестность $U$ точки $a$ такая, что $f(x) < M$ для всех $x \in U \cap D \setminus \{a\}$. Если предел функции равен $+\infty$ или $-\infty$, то функцию $f(x)$ называем *бесконечно большой в окрестности точки $a$*.

◀ **12.3.** *Если предел функции существует, то он единственен.*

Действительно, если $A$ и $A'$ – пределы функции $f(x)$ при $x \to a$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся окрестности $U_1, U_2$ точки $a$ такие, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для любого $x \in U_1$ и $|f(x) - A'| < \varepsilon$ для любого $x \in U_2$ принадлежащих ОДЗ$(f)$ и не равных $a$. Тогда для $x \in U_1 \cap U_2$ из ОДЗ$(f)$ и $x \neq a$ последние два неравенства выполняются одновременно, поэтому

$$|A - A'| \leq |A - f(x)| + |f(x) - A'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Так как это верно для любого $\varepsilon$, то с необходимостью следует $A = A'$. $\square$

Функция $f(x)$ называется *ограниченной в окрестности точки $a$*, если найдется окрестность $U$ этой точки такая, что числовое множество

$$\{f(x) \mid x \in U \cap \text{ ОДЗ}\,(f)\}$$

ограничено, т.е. существует константа $M$ такая, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in U \cap$ ОДЗ$\,(f)$.

◀ **12.4.** *Функция $f(x)$, имеющая предел $A$ при $x \to a$, ограничена в окрестности точки $a$.*

В самом деле, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ для любых $x \in U \cap$ ОДЗ$(f)$, не равных $a$, то для тех же $x$ имеет место оценка $|f(x)| \leq |A| + \varepsilon$. Если $a \in$ ОДЗ$(f)$, то взяв $M = \max\{|A| + \varepsilon, |f(a)|\}$, получим, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in U \cap$ ОДЗ$(f)$. $\square$

Далее, говоря о пределе функции $y = f(x)$ при $x \to a$ подразумеваем, что $a$ – предельная точка ОДЗ функции $f$ и предел записываем как $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ подразумевая, что переменная $x$ приближается к точке $a$, пробегая ОДЗ функции $f$ и не совпадая с $a$.

◀ **12.5.** *Если предел $A = \lim_{x \to a} f(x)$ отличен от нуля, то найдется окрестность $U$ точки $a$ такая, что значение $f(x)$ одного знака с пределом $A$ для любого $x \in U \cap$ ОДЗ$(f)$ и $x \neq a$ (в частности, $f(x) \neq 0$ для этих значений переменной $x$). Более того, в этом случае функция $1/f(x)$ (определенная, на каком-либо множестве $V \cap$ ОДЗ$(f) \setminus \{a\}$, где $V$ – окрестность точки $a$) ограничена в окрестности точки $a$.*

*Доказательство.* Полагаем $A > 0$. Для $\varepsilon := A/2$ найдем окрестность $U$ такую, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для любого $x \in U \cap$ ОДЗ$(f)$, $x \neq a$. Тогда $f(x) > A/2$ и $0 \leq 1/f(x) < 2/A$ для всех $x \in U \cap$ ОДЗ$(f)$, $x \neq a$. Аналогично разбирается случай $A < 0$. $\square$

Функцию $f(x)$, для которой найдется окрестность $U$ точки $a$ и число $C$ такие, что $f(x) = C$ для любого $x \in U \cap$ ОДЗ$(f) \setminus \{a\}$ назовем *константной в окрестности точки $a$.*

◀ **12.6.** *Предел константной в окрестности точки $a$ функции (равной $C$) существует при условии $x \to a$, и он равен константе $C$.* $\square$

Заметим, что предел последовательности есть частный случай общего определения 12.1. Действительно, последовательность $(a_n)$ есть функция, сопоставляющая натуральному числу $n$ действительное число $a_n$, т.е. ОДЗ такой функции есть множество натуральных чисел. Для множества натуральных чисел имеется лишь одна предельная точка: $+\infty$ и по определению

$$\lim a_n = \lim_{n \to +\infty, n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Предел функции и предел последовательности связаны между собой, как показывает следующая теорема

**Теорема 12.7.** *Пусть $f(x)$ – функция, определенная в проколотой окрестности точки $a$. Тогда предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен $A$ в том и только том случае, когда для любой последовательности $(x_n)$ точек, сходящихся к $a$ и отличных от $a$, последовательность значений $(f(x_n))$ сходится к $A$.*

*Доказательство.* Пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $(x_n)$ – последовательность, сходящаяся к $a$, причем $\forall n(x_n \neq a)$. Возьмем какое-либо положительное $\varepsilon$ и найдем для него $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ как только $0 < |x - a| < \delta$. Так как $\lim x_n = a$, то найдется номер $N$ такой, что для всех $n \geq N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \delta$. Тогда $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Это значит, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

Наоборот, пусть равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ не имеет места. Тогда

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0\ \exists x_\delta :\ (0 < |x_\delta - a| < \delta \text{ и } |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon).$$

Взяв здесь последовательность $\delta_n > 0$, сходящуюся к нулю и выбрав для нее соответствующие $x_n := x_{\delta_n}$, получим последовательность $(x_n)$, сходящуюся к $a$, но такую, что $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$ для любого $n$, и поэтому предел $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ не может быть равным $A$. □

### XII.1. Бесконечно малые величины

Техника вычисления пределов, да и само понятие предела, станет более прозрачной, если ввести в обиход бесконечно малые величины. Пусть функция $\alpha(x)$ рассматривается на множестве $D$, т.е. $D = \text{ОДЗ}(\alpha)$, а $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ является предельной точкой множества $D$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* (кратко: б.м.) при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$. Это означает, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U$ точки $a$ такая, что для любого аргумента $x \in U \cap D$, не совпадающего с $a$, верна оценка $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Сразу же отметим, как связаны понятия предела и понятие бесконечной малой величины.

◀ **12.8.** *Функция имеет предел $A$ тогда и только тогда, когда она отличается от числа $A$ на бесконечно малую величину:*

$$\lim_{x\to a, x\in D} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = A + \alpha(x) \text{ где } \alpha(x) - \text{ б.м. при } x \to a$$

Действительно, неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$ и $|\alpha(x)| < \varepsilon$ эквивалентны, если положить $\alpha(x) = f(x) - A$. □

Ранее доказано, что последовательность $\frac{1}{n}$ бесконечно мала так же, как и функция $\frac{1}{x}$ при $x \to \pm\infty$. Самой простой б.м. при $x \to 0$ функцией следует считать $y = x$. Нулевая функция будет б.м. для любой базы $x \to a$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Квадратный трехчлен $y = x^2 - 3x + 2$ бесконечно мал при $x \to 1$ и при $x \to 2$, для других баз предела эта функция не будет бесконечно малой величиной.

Отметим некоторые свойства бесконечно малых величин.

**БМ1** *Сумма и разность конечного числа б.м. есть б.м. величина.*

**БМ2** *Произведение б.м. на ограниченную в точке $a$ функцию (в частности, на функцию имеющую предел, на константу) будет б.м.*

**БМ3** *Отношение б.м. к функции, имеющей ненулевой предел, есть б.м. величина.*

**БМ4** *Пусть выполняется неравенство $\alpha(x) \le \tau(x) \le \beta(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки $a$, а точка $a$ является предельной для пересечения ОДЗ функций $\alpha, \tau, \beta$. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малы при $x \to a$, то и функция $\tau(x)$ такова.*

Докажем эти свойства. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \to a$, функция $f(x)$ ограничена числом $M$ в окрестности точки $a$, а $B = \lim_{x\to a} g(x) \ne 0$. При этом точка $a$ является предельной для пересечения ОДЗ функций $\alpha, \beta, f, g$. Будем считать, что $a \notin D$ (т.е. рассматриваем сужение перечисленных выще функций на проколотую окрестность точки $a$).

Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ найдем окрестности $U_\alpha$, $U_\beta$ точки $a$ такие, что $|\alpha(x)| < \varepsilon/2$ для любого $x \in U_\alpha \cap D$ и $|\beta(x)| < \varepsilon/2$ для любого $x \in$

$U_\beta \cap D$. Тогда для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap D$ верны оба неравенства, и поэтому $|\alpha(x) \pm \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Тем самым $U_\alpha \cap U_\beta$ – искомая окрестность точки $a$. Доказано первое свойство.

Если $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in U_f \cap D$ для некоторой окрестности $U_f$ точки $a$, то найдем окрестность $U_\alpha$ точки $a$ такую, что $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ для любого $x \in U_\alpha \cap D$. Тогда для любого $x \in U_f \cap U_\alpha \cap D$ получаем оценку

$$|\alpha(x) f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

и второе свойство также доказано.

Так как $\frac{1}{g(x)}$ ограничена в окрестности точки $a$ (свойство 12.5), и $\frac{\alpha(x)}{g(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, то третье свойство следует из второго.

Как и в доказательстве первого свойства выберем окрестности $U_\alpha, U_\beta$ для наперед заданного $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap D$ верно следующее:

$$|\tau(x)| \leq \max\{|\alpha(x), \beta(x)|\} < \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

что доказывает последнее четвертое свойство бесконечно малых величин.

Бесконечно малые можно сравнивать между собой по степени малости. Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ – б.м. при $x \to a$. Тогда $\beta$ называется *бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с* $\alpha$, если $\lim_{x\to a} \frac{\beta}{\alpha} = 0$. В этом случае записываем $\beta = o(\alpha)$ (читается: б.м. $\beta(x)$ есть о-малая по сравнению с б. м. $\alpha(x)$). Бесконечно малая $\gamma$ называется *эквивалентной б. м.* $\alpha$, если $\alpha - \gamma = o(\alpha)$. Этот факт записываем так: $\alpha \sim \beta$.

◀ **12.9.** *Бесконечно малые $\alpha$, $\gamma$ эквивалентны, если и только, если предел их отношения (в любом порядке) равен 1.*

Действительно, если $\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\gamma} = 1$, то $\lim_{x\to a} \frac{\alpha-\gamma}{\gamma} = 0$, откуда $\alpha - \gamma = o(\alpha)$. Наоборот, если $\alpha - \gamma = o(\alpha)$, то $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha} \to 0$, откуда $\frac{\alpha}{\gamma} \to 1$.

## XII.2. Свойства пределов

С помощью свойств БМ1-БМ4 бесконечно малых величин установим свойства пределов функций.

**Арифметические свойства пределов функций**. Пусть существую пределы $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Тогда $f(x) = A + \alpha(x)$ и $g(x) = B + \beta(x)$ для б.м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ согласно свойства 12.8.

**ПР1**. *Предел суммы $f(x) + g(x)$ существует и равен сумме пределов:*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B.$$

В самом деле, $f(x) + g(x) = A + \alpha(x) + B + \beta(x) = (A + B) + (\alpha(x) + \beta(x))$ и $\alpha(x) + \beta(x)$ – б.м. согласно БМ1. Тогда снова применяя свойство 12.8 в обратном порядке, получаем требуемое.

**ПР2**. *Предел произведения $f(x)g(x)$ существует и равен произведению пределов:*

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB. \tag{12.1}$$

В частности, константу можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda A.$$

Для доказательства этого свойства оценим

$$f(x)g(x) - AB = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) - AB = B\alpha(x) + A\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$$

– б.м. согласно свойствам БМ1 и БМ2. Следовательно, равенство (12.1) доказано (свойство 12.8). Так как предел константной функции равен этой константе (свойство 12.6), то утверждение „в частности“ следует.

**ПР3.** *Предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен отношению пределов в том случае, когда предел знаменателя отличен от нуля.*

Действительно,

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B(B + \beta(x))}.$$

Числитель $B\alpha(x) - A\beta(x)$ является б.м., а знаменатель имеет предел равный $B^2 \neq 0$ согласно доказанному выше свойству ПР2. Ввиду свойства БМ4 получаем требуемое.

Следующие свойства описывают **предельный переход в неравенствах**.

**ПР4.** *Если $f(x) \geq 0$ при любом $x$ из некоторой малой проколотой окрестности точки $a$, то и $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ (при условии существования предела). Аналогично свойство имеет место для неравенства "$\leq$ ".*

Это утверждение прямо следует из свойства 12.5. Как следствие ПР4 получаем **монотонность предела**.

**ПР5.** *Предположим, что $f(x) \geq g(x)$ для любого $x$ из достаточно малой проколотой окрестности точки $a$. Тогда и $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ при условии существования этих пределов.*

Следующее свойство называется **теоремой о пределе промежуточной функции**.

**ПР6.** *Предположим, что $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ для любого $x$ из некоторой проколотой окрестности точки $a$. Предположим также, что пределы $\lim_{x \to a} f(x)$ и $\lim_{x \to a} g(x)$ существуют и совпадают между собой. Тогда и предел промежуточной функции $h(x)$ при $x \to a$ существует и совпадает с пределами крайних функций.*

Это свойство вытекает из свойства БМ4 бесконечно малых величин.

**ПР7.** (предел сложной функции) *Предположим, что*
*а) существует предел $\lim_{x \to a} f(x)$ равный $b$;*
*б) существует предел $\lim_{t \to b} g(t) = A$.*

*Тогда существует предел сложной функции $g(f(x))$ при $x \to a$ и он равен $A$.*

*Доказательство.* Фиксируем $\varepsilon > 0$. Находим $\delta > 0$ такое, что $|g(t) - A| < \varepsilon$ для любого $0 < |t - b| < \delta$. Для этого $\delta$ находим $\tau > 0$ такое, что как только $0 < |x - a| < \tau$, то $|f(x) - b| < \delta$. Тогда и неравенство $|g(f(x)) - A| < \varepsilon$ также будет выполнено для любого $x$, удовлетворяющего неравенствам $0 < |x - a| < \tau$. $\square$

### XII.3. Вычисление пределов с помощью замены б.м. на эквивалентные

**Предложение 12.10.** *Бесконечно малую величину $\alpha(x)$ можно заменить* *на эквивалентную (более просто устроенную) б.м., если $\alpha(x)$ стоит в качестве сомножителя в числителе или знаменателе. Более строго: Пусть функции $f(x), \alpha(x), \beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a. Предположим, что $\alpha$ и $\beta$ эквивалентные б.м. Тогда*

$$\lim_{x\to a} f(x)\alpha(x) = \lim_{x\to a} f(x)\beta(x), \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\beta(x)},$$

*причем предел в правой части равенств существует в том и только том случае, когда существует предел в левой части.*

*Доказательство.* Запишем $f\cdot\alpha = f\cdot\beta\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, $\frac{f}{\alpha} = \frac{f}{\beta}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ и применим свойство предела ПР3 "предел произведения". $\square$

Приведем примеры б.м. при $x \to 0$:

$$x, x^2, \sqrt{x}, \sin x, \operatorname{tg} x, \arcsin x, \operatorname{arctg} x, e^x - 1, \ln(1+x), (1+x)^m - 1$$

Они по разному устроены и самыми простыми, видимо следует считать степени $x$. Заметим, что обе функции $x, x^2$ являются б.м. при $x \to 0$, однако вторая меньше по сравнению с первой, что видно из таблицы 5

*Таблица 5.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0.1 | 0,01 | 0.001 | 0.0001 | ... |
| $x^2$ | 0.01 | 0.0001 | $10^{-6}$ | $10^{-8}$ | ... |

Бесконечно малую величину $\beta(x)$ назовем *бесконечно малой высшего порядка малости* по сравнению с б.м. $\alpha(x)$, если предел отношения $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ равен нулю (база $x \to a$ фиксирована).

Свойства БМ1-БМ4 останутся справедливыми, если в них заменить слова "б.м." на "б.м. высшего порядка малости по сравнению с $\beta(x)$". А именно

**БМВ1** *Сумма и разность о-малых есть о-малая.*

**БМВ2** *Произведение о-малой на ограниченную в точке функцию (в частности, на константу) – о-малая.*

**БМВ3** *Пусть $\tau(x)$ – о-малая величина относительно $\beta(x)$ при $x \to a$, причем $|\alpha(x)| \leq \tau(x)$ в некоторой выколотой окрестности точки $a$. Тогда $\alpha = o(\beta(x))$.*

Остается только узнать какие б.м. более сложные, а какие более простые. Забегая вперед, приведём таблицу (Таблица 6) эквивалентных б.м. относительно базы предела $x \to 0$

*Таблица 6*

| | |
|---|---|
| $\sin x \sim x$ | $e^x - 1 \sim x$ |
| $\operatorname{tg} x \sim x$ | $\ln(1+x) \sim x$ |
| $\arcsin x \sim x$ | $(1+x)^m - 1 \sim mx$ |
| $\operatorname{arctg} x \sim x$ | $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ |
| $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ | $a^x - 1 \sim (\ln a) \cdot x$ |

Вычислим предел, применяя предложение 12.10.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \ln(1+2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x \cdot x \cdot 2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x^2}{2\cos x \cdot 2x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{4}.$$

В частности, $\operatorname{tg} x - \sin x = o(x^2)$ и $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$ при $x \to 0$.

### XII.4. Задачи

**12.11.** Доказать, пользуясь только определением предела, что $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

**12.12.** Найти пределы

а) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$;

б) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

в) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{e^{5x}-e^{3x}}$;

г) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\ln(1+2x)}$.

**12.13.** Найти б.м. вида $Ax^n$ при $x \to 0$, эквивалентную $\operatorname{arctg} x - \arcsin x$.

# ЛЕКЦИЯ XIII
## Замечательные пределы

**XIII.1. Первый замечательный предел**. Обоснуем левый столбец в таблице эквивалентных б.м., доказав, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{13.1}$$

Здесь снова мы сталкиваемся с неопределенностью $\left[\frac{0}{0}\right]$, которую никакими чисто алгебраическими преобразованиями не раскрыть. Придется вникать в определения $\sin x$ и радианной меры угла.

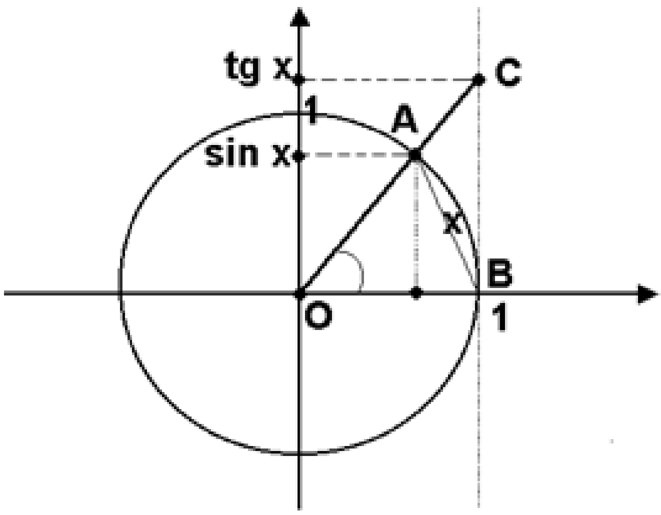



Рис. 20: Первый замечательный предел

На рис. 20 $x$ – длина дуги $AB$. Из рисунка видно, что при $0 < x \le \pi/2$ имеют место неравенства $\sin x \le |AB| < |BC| = \operatorname{tg} x$, тем самым

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Поделим все части этого неравенства на $\sin x$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Обратим дроби и выводим $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Отметим также, что заодно мы доказали неравенство $\sin x \le x$ для $x \in [0, \pi/2]$. Так как функции $\frac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ четные, то для любых ненулевых $x$ с модулем, меньше $\pi/2$, имеют место неравенства

$$1 \ge \frac{\sin x}{x} \ge \cos x; \quad |\sin x| \le |x| \tag{13.2}$$

Тогда
$$0 \le 1 - \cos x = 2\sin^2(x/2) \le 2(x/2)^2 = x^2/2$$
– б.м., откуда $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. Левая часть двойного неравенства в (13.2) также имеет предел, равный 1. По теореме о пределе промежуточной функции получаем требуемое равенство (13.1).

## XIII.2. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{13.3}$$

*Доказательство.* Докажем это равенство, используя теорему о связи предела функции с пределом последовательности. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность точек, сходящихся к $+\infty$. Можно считать, что $x_n > 1$ для всех $n$, так что последовательность $u_n = \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ определена. Имеем:

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \le u_n \le \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}. \tag{13.4}$$

Так как
$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} = \frac{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}}{1+\frac{1}{[x_n]+1}}$$
и
$$\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} = \left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}\cdot\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right),$$
то пределы крайних последовательностей в (13.4) существуют и равны основанию натуральных логарифмов $e$. Тогда по свойству предела промежуточной последовательности получаем, что предел последовательности $u_n$ существует и равен $e$. □

Имеет место также следующее равенство, которое получается из (13.3) переходом к новой переменной $x \to -x$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{13.5}$$

Верно также следующее равенство (замена $x$ на $1/x$ в (13.3).

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{13.6}$$

### XIII.3. Задачи

**13.1.** Доказать, что $\operatorname{tg} x \sim x$ и $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ при $x \to 0$

**13.2.** Получить равенства (13.5) и (13.6) как следствие второго замечательного предела

**13.3.** Найти пределы а) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2}{3+5x}\right)^x$; б) $\lim n(\sqrt[n]{a}-1)$ (здесь $a>0$); в) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

**13.4.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$.

**13.5.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{tg} x)-\operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x)-\operatorname{arctg}(\arcsin x)}$

# ЛЕКЦИЯ XIV
# Непрерывность. Теоремы Вейерштрасса и Больцано–Коши

Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности точки $a$, называется *непрерывной в этой точке*, если $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Функция *непрерывна на отрезке (интервале)*, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка (интервала).

Это определение можно переписать так: функция непрерывна в точке а, если $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$, т.е. в том случае, когда две операции над переменной $x$ – правило-функция $f$ и предельный переход перестановочны.

Обозначим $\Delta x = x - a$ – приращение переменной и $\Delta f = f(x) - f(a)$ – приращение функции. Тогда определение непрерывности можно переписать и так: функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$, если $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0$, т.е., если приращение функции есть бесконечно малая величина при условии $\Delta x \to 0$.

◄ **14.1** (**Свойства непрерывных функций**). **Н1**. *Сумма непрерывных функций – непрерывная функция*

**Н2**. *Произведение непрерывных функций – непрерывная функция*

**Н3**. *Частное непрерывных функций – непрерывная функция, во всех точках, где знаменатель отличен от 0.*

**Н4**. *Подстановка непрерывной функции в непрерывную функцию есть непрерывная функция*

Эти свойства являются непосредственным следствием соответствующих свойств пределов.

**Теорема 14.2** (**Устойчивость знака непрерывной функции**). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $a$ и $f(a) > 0$. Тогда найдется окрестность $U$ точки $a$ такая, что $f(x) > 0$ для всех $x \in U$. Аналогичное утверждение справедливо для случая $f(a) < 0$.*

Действительно, для $\varepsilon := f(a)/2$ найдется $\delta > 0$ такое, что как только $|x-a| < \delta$, то $|f(x) - f(a)| < f(a)/2$. Для этих значений $x$ имеем: $f(x) > f(a) - f(a)/2 = f(a)/2 > 0$.

Примеры непрерывных функций.

1. *Константа, а также тождественная функция* $y = x$ *– непрерывны.*

2. *Любой многочлен – непрерывная функция.*

Для доказательства применяем свойства Н1 и Н2 к тождественной функции.

3. *Рациональная функция, т.е. отношение двух многочленов, – непрерывная функция в точках, не являющихся корнями знаменателя.*

Для доказательства следует применить свойство Н3 к многочленам.

4. *Функция* $\sin x$ *непрерывна.*

Действительно, учитывая неравенство $|\sin t| \le |t|$, полученное при выводе первого замечательного предела, и ограниченность косинуса, выводим:

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \le 2\frac{x-a}{2} = |x-a|\,.$$

Так как $|x-a|$ – б.м. при $x \to a$, то и $\sin x - \sin a$ – б.м. по свойству БМ3.

5. *Функция* $e^x$ *непрерывна*

*Доказательство.* Так как $\Delta(e^x) = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$, то достаточно доказать, что $e^h - 1$ – б.м. при $h \to 0$. В силу второго замечательного предела $e = \lim_{h\to 0}(1+2h)^{1/2h}$. Следовательно для достаточно малых $h > 0$ имеют место оценки

$$e < \left((1+2h)^{1/2h}\right)^2 = (1+2h)^{1/h} \;\Rightarrow\; e^h < 1+2h \;\Rightarrow\; 0 < e^h - 1 < 2h$$

откуда следует, что $\lim_{h\to 0+0} e^h = 1$. Так как $e^{-h} = 1/e^h$, то получаем $\lim_{h\to 0} e^h = 1$, т.е. $e^h - 1$ – б.м. $\square$

**Точки разрыва функции**. Точка, в которой отсутствует непрерывность, называется *точкой разрыва функции.* Если функция $y = f(x)$ определена в проколотой окрестности точки $a$, но не определена в самой точке $a$, то заведомо $a$ – точка разрыва. Точка $a$ будет точкой разрыва в следующих исчерпывающих случаях:

**а)** существует предел $A := \lim_{x\to a} f(x)$, но он не совпадает с $f(a)$, или $a$ не входит в ОДЗ функции. В этом случае точка разрыва $a$ называет *устранимой*. Доопределив функцию в точке $a$ значением, равным пределу $A$, получаем непрерывную в точке $a$ функцию;

**б)** односторонние пределы в точке $a$ существуют, но не совпадают между собой, тогда $a$ называют *неустранимой точкой разрыва первого рода*;

**в)** какого-либо одностороннего конечного предела не существует, тогда $a$ называют *точкой разрыва второго рода*.

**Пример 14.3.** 1. Точка $a = 0$ будет устранимой точкой разрыва функции $\frac{\sin 3x}{x}$. Доопределив эту функцию значением 3 в нулевой точке, получим всюду определенную и всюду непрерывную функцию.

2. Точка $a = 0$ будет неустранимой точкой разрыва первого рода функции $y = \operatorname{sgn} x$, ибо предел справа в этой точке равен 1, а предел слева равен $-1$.

3. Точка $a = 0$ будет точкой разрыва второго рода функции $y = \exp(1/x)$, несмотря на то, что $\lim_{x\to 0-0} y = \exp(-\infty) = 0$. Однако, предел справа равен $+\infty$ в этой точке.

### XIV.1. Функции, непрерывные на отрезке

**Теорема 14.4 (Больцано–Коши).** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в концах отрезка принимает значения разных знаков. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.*

*Доказательство.* Строим систему вложенных друг в друга отрезков $\{\Delta_n\}$. Первый из них – отрезок $[a, b]$. Далее рассмотрим точку $d = (b + a)/2$ – середину отрезка $[a, b]$. Если $f(d) = 0$, то $c = d$ – искомая точка. Иначе, из двух отрезков $[a, d]$ и $[d, b]$ выбираем тот, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Его объявляем $\Delta_2$, и с ним поступаем точно также, как и с отрезком $\Delta_1$. И так далее. Либо мы на каком-то шаге придем к искомой точке $c$, либо получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots$, каждый последующий из которых вдвое короче предыдущего, и на концах каждого из отрезков $\Delta_n$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Из принципа Кантора о вложенных отрезках вытекает, что существует точка $c$, принадлежащая всем отрезкам $\Delta_n$. Если $f(c) > 0$, то найдется окрестность $U$ точки $c$ такая, что для любого $x \in U$ следует неравенство $f(x) > 0$ (теорема 14.2, устойчивость знака непрерывной функции). Но ясно, что $\Delta_n \subseteq U$ для какого либо $n$. Это противоречит тому, что на концах отрезка $\Delta_n$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Аналогично приводится к противоречию предположение $f(c) < 0$. Остается случай $f(c) = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

**Следствие 14.5.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $I$, $x_1, x_2 \in I$ и $M_1 = f(x_1)$, $M_2 = f(x_2)$. Тогда для любого числа $C$, лежащего между $M_1$ и $M_2$, найдется точка $c \in [x_1; x_2]$ такая, что $f(c) = C$.*

Для доказательства достаточно применить теорему Больцано-Коши к разности $f(x) - C$ и отрезку $[x_1, x_2]$ вместо отрезка $[a, b]$.

Методом дихотомии решим уравнение $x^3 = x+1$ на отрезке $[0; 2]$ (см. Таблицу 6), где знак $<$ означает, что $x^3 > x + 1$ в данной точке $x$.

*Таблица 6*

| $x$ | 0 | 2 | 1 | 1.5 | 1.25 | 1.375 | 1.3125 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | 1 | 3 | 2 | 2.5 | 2.25 | 2.175 | 2.3125 |
| $x^3$ | 0 | 8 | 1 | 3.375 | $\approx 1.9571$ | $\approx 2.6$ | $\approx 2.26$ |
| $><$ | $>$ | $<$ | $>$ | $<$ | $>$ | $<$ | $>$ |

Можно сделать вывод: мы локализовали корень $x_0 \approx \frac{1.375+1.3125}{2} = 1,34375$ уравнения $x^3 = x + 1$ с точностью $\varepsilon = \frac{1.375-1.3125}{2} = 0,03125$.

Метод поиска решения уравнения $f(x) = 0$, изложенный выше, называется *методом половинного деления* или методом *дихотомии*. Методом дихотомии можно доказать и следующую принципиальную теорему

**Теорема 14.6 (Вейерштрасса).** *Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке и достигает своего наибольшего и наименьшего значения, т.е. существуют точки $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ такие, что*

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

*для любого $x \in [a, b]$.*

*Доказательство.* Для поиска $\max\{f(x) \mid x \in [a;b]\}$ снова строим последовательность вложенных друг в друга отрезков $(\Delta_n)$, где каждый последующий равен половине (левой или правой) предыдущего. Первый из них $\Delta_1 = [a;b]$. В качестве отрезка $\Delta_{n+1}$ выбираем ту половину отрезка $\Delta_n$, где есть значение превосходящее все значения оставшейся половины. Если такового значения нет, то выбираем любую из половинок. Пересечение $\bigcap_n \Delta_n$ имеет общую точку $c$ (принцип Кантора), причем только одну (в силу $|\Delta_n| \to 0$). Тогда $f(c)$ искомое максимальное значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. В самом деле, если это не так, то найдется $x_1 \in [a;b]$ с условием $f(x_1) > f(c)$. Далее прослеживая за построением отрезков $\Delta_n$ и каждый раз выбирая из $\Delta_n$ точку $x_n$ с условием $f(x_n) \geq f(x_{n-1})$ (*), начиная с $n = 2$ получаем в результате последовательность точек $x_n \in [a;b]$, сходящуюся к $c$. Тогда с одной стороны, $\lim f(x_n) = f(c)$ в силу непрерывности функции $f$, а с другой стороны $\lim f(x_n) \geq f(x_1) > f(c)$ ввиду (*). Полученное противоречие указывает, что точка $c = x_{max}$. Аналогично находится точка $x_{min}$. □

Для полуинтервала и интервала аналогичное утверждение неверно – см. примеры неограниченной функции $1/x$ на полуинтервале $(0;1]$ и двусторонне неограниченной функции $\operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$.

Ранее мы уже знакомились с обратными функциями: функция $\sqrt{x}$ обратна к $x^2$, $(x \geq 0)$ функция $\arcsin x$ обратна к $\sin x$ $(x \in [-\pi/2; \pi/2])$, и т.д. Но только сейчас мы можем обосновать существование и доказать непрерывность этих обратных функций.

**Теорема 14.7** (непрерывность обратной функции)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывно и строго монотонно отображает отрезок $[a,b]$ в отрезок $[c,d]$ так, что $f(a) = c$, $f(b) = d$ (либо $f(a) = d$, $f(b) = c$), то обратная функция $x = g(y)$ существует, и она непрерывно и монотонно отображает отрезок $[c,d]$ на отрезок $[a,b]$.*

*Доказательство.* Существование обратной функции, т.е. фактически свойство $f([a,b]) = [c,d]$, вытекает из следствия теоремы Больцано-Коши. Монотонность $g$ ясна. Докажем непрерывность. Пусть $x_0 = g(y_0)$ для некоторого $y_0 \in [c;d]$ и $\varepsilon > 0$. Предполагаем, что $f$ строго возрастает. Тогда

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon).$$

Возьмем $\delta = \min\{f(x_0+\varepsilon) - y_0; y_0 - f(x_0-\varepsilon)\}$. Тогда для $y \in (y_0-\delta, y_0+\delta)$ выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon$. Это влечет непрерывность функции $g$. □

Ранее мы уже определили корень арифметический n-ой степени из неотрицательного числа $a$ как число $b \geq 0$ такое, что $b^n = a$. Как следствие теоремы 14.7, получаем обоснование существования такого числа $b$.

**Следствие 14.8.** *Определены и непрерывны следующие строго монотонные функции*

**А.** $y = \sqrt[n]{x}$ *$(x \geq 0)$ – непрерывная монотонная функция как обратная к непрерывной монотонной функции $x = y^n$ $(y \geq 0)$. Для нечетных показателей $n$ она распространяется по нечетности на отрицательные значения аргумента $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.*

**Б.** $y = \arcsin x$ *– непрерывная монотонная функция как обратная к непрерывной монотонной функции $x = \sin y$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$.*

**В.** $y = \operatorname{arctg} x$ *– непрерывная монотонная функция как обратная к непрерывной монотонной функции $x = \operatorname{tg} y$, $-\pi/2 < y < \pi/2$.*

**Г.** $y = \ln x$ *$(x > 0)$ – непрерывная монотонная функция как обратная к непрерывной монотонной функции $x = e^y$. Более общо, функция $x = a^y$ для $1 \neq a > 0$ имеет обратную $y = \log_a x$.*

**Принцип непрерывности.** *Естественной ОДЗ* аналитического выражения $f(x)$ называется совокупность всех чисел, при которых все операции, входящие в аналитическое выражение определены, и получается итоговый результат – $y = f(x)$.

**Теорема 14.9.** *Любая элементарная функция непрерывна на всей естественной области определения.*

*Доказательство.* Тождественная функция и константа очевидно непрерывны. В пп. 4 и 5 примеров непрерывных функций доказана непрерывность синуса и экспоненты. Непрерывность обратных функций (следствие 14.8) установлена. Все другие элементарные функции получаются из основных (в число которых достаточно включить $C$, $\exp(x)$, $\sin x$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$) арифметическими операциями и операцией подстановки функции в функцию, которые не выводят за класс непрерывных функций (см. свойства непрерывных функций Н1-Н4 выше). □

**Следствие 14.10.** *Если $y = f(x)$ – элементарная функция, и $a \in$ ОДЗ$(f)$, то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

## XIV.2. Задачи

**14.11.** Методом дихотомии отделить корни, а затем вычислить их с точностью 0.01 для уравнений а) $x^3 + x = 3$, б) $e^x = 3x$, в) $\sin x = \frac{x}{2}$.

**14.12.** Найти обратные функции для а) $y = 7x - 2$, б) $y = \frac{2x-1}{3x+2}$

**14.13.** Построить табличку значений функции обратной к функции $y = xe^x$, где $x \in [-1; +\infty)$

**14.14.** Объяснить, почему нельзя придумать алгоритма вычисления наибольшего значения функции на заданном отрезке, основываясь только на непрерывности функции

**14.15.** Функция $y = f(x)$ удовлетворяет *условию Липшица* на отрезке $[a; b]$ с показателем $L$, если для любых $x_1, x_2 \in [a; b]$ выполняется неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L \cdot |x_2 - x_1|$$

Доказать, что такая функция непрерывна и придумать алгоритм отыскания наибольшего (наименьшего) значения такой функции с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

# ЛЕКЦИЯ XV
## Производная. Дифференциал.

**Задача о касательной.** Пусть на плоскости или в пространстве задана некоторая кривая $\gamma$ и точка $P$ на ней. Требуется определить понятие касательной к $\gamma$ в точке $P$ и найти способ вычисления ее уравнения (см. рис. 21). Выберем точку $Q$ на кривой $\gamma$, не совпадающую с точкой $P$.

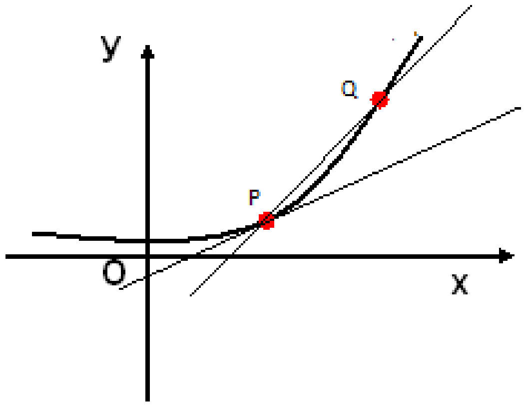



Рис. 21: Секущая и касательная

Проведем через точки $P$ и $Q$ прямую $\ell_{PQ}$, называемую *секущей*. *Касательной в точке $P$ к кривой* $\gamma$ назовем предельное положение секущих $\ell_{PQ}$ в случае, когда точка $Q$ приближается к точке $P$, оставаясь на кривой $\gamma$. Пусть теперь $\gamma$ – график функции $y = f(x)$, и точка $P$ имеет координаты $(a, f(a))$. Рассмотрим точку $Q(x, f(x)) \in \gamma$ . Обозначим $\Delta x = x - a$, $\Delta y = f(x) - f(a)$ и назовем эти величины *приращением аргумента* и *приращением функции* соответственно. Тогда угловой коэффициент секущей $\ell_{PQ}$ будет равен $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, и ее уравнение будет

$$Y - f(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - a). \tag{15.1}$$

Здесь $(X, Y)$ – координаты произвольной точки, взятой на секущей. Если устремить $\Delta x$ к нулю, то $Q \to P$, причем $Q \in \gamma$, и секущая (15.1) переходит в касательную с угловым коэффициентом

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

**Пример 15.1.** Найдем касательную к кубической параболе $y = x^3$ в точке $a = 1$. Имеем

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x)^3 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}((\Delta x)^2 + 3\Delta x + 3) = 3.$$

Отсюда получаем ответ: $y-1 = 3(x-1)$ или $y = 3x-2$. Это и есть уравнение искомой касательной.

К задаче о нахождении касательной можно подойти чисто аналитически: надо найти линейную функцию $y = kx+b$, отличающуюся от функции $y = f(x)$ в окрестности точки $P$ на величину бесконечно малую высшего порядка по сравнению с $x - a$ при $x \to a$. Тогда, прежде всего $f(a) = ka + b$, откуда $b = f(a) - ka$. Далее

$$f(x) - (kx + b) = o(x - a) \;\Rightarrow\; \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - k(x - a)}{x - a} = 0,$$

что влечет $k = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k_{\text{кас}}$. Если перейти к приращениям, то получаем, что функцию $\Delta f$ переменного $\Delta x$ наилучшим образом приближает в нуле линейная функция $k_{\text{кас}}\Delta x$ или, по другому, б. м. $\Delta f$ эквивалентна б.м. $k_{\text{кас}}\Delta x$. Эта линейная б.м. называется дифференциалом функции $f$ в точке $a$ и обозначается $df(a; \Delta x)$ (см. далее §XV.5).

**Задача о мгновенной скорости.** Рассмотрим материальную точку, движущуюся по оси $Ox$. Предположим, что нам известен закон движения – функция $x(t)$, задающая координату точки в момент времени $t$. Фиксируем какой-либо момент времени $t_0$. Поставим задачу об определении и вычислении мгновенной скорости $v_{\text{мг}}(t_0)$ в момент времени $t_0$. Придадим приращение $\Delta t$ времени и найдем соответствующее ему приращение координаты $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$. Тогда отношение приращения координаты к приращению времени задает *среднюю скорость* на временном участке $[t_0; t_0 + \Delta t]$:

$$v_{\text{ср}}(t_0, t_0 + \Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

*Мгновенную скорость* определим как предел средней скорости при $\Delta t \to 0$:

$$v_{\text{мг}}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{15.2}$$

Закон падения тела с высоты без учета сопротивления воздуха задается как $x(t) = \frac{gt^2}{2}$ ($g \approx 9.8$(м/сек$^2$) – ускорение свободного падения). Вычислим скорость тела (в $\frac{\text{м}}{\text{сек}}$) после 3-х секунд падения:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(3+h)^2/2 - g \cdot 3^2/2}{h} t = \frac{g}{2} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = g/2 \cdot 6 = 3g \approx 29,4$$

**Определение 15.2.** Предел

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{15.3}$$

называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* $a$.

**Механический смысл производной**: производная есть мгновенная скорость материальной точки, движущейся по оси, если аргумент интерпретируется как время, а значение функции интерпретируем как координату материальной точки на оси. По этой причине производную иногда называют скоростью изменения значений функции.

Как следствие определения 15.2 получаем *уравнение касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $(a, f(a))$*:*

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(a) + f'(a)(x-a) \tag{15.4}$$

Тем самым производная функции в точке $a$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(a, f(a))$ (**геометрический смысл производной**).

*Нормаль к графику функции* $f(x)$ в точке $P(a, f(a))$ по определению есть прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной. Применяя теорему 8.1, п. д), получаем уравнение нормали, исходя из уравнения касательной:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a).$$

**Пример 15.3.** Найдем касательную и нормаль к гиперболе $y = 3/x$ в точке $P(3; 1)$. Так как

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{1/(x+h)-1/x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2},$$

то получаем уравнение касательной: $y = -\frac{1}{3}x + 2$. Тогда уравнение нормали таково: $y = -3x + 10$.

Производная в произвольной точке может рассматриваться как функция. При этом некоторые точки могут выпадать из ОДЗ исходной функции. Например, $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ (см. далее ТП1) и точка 0 не принадлежит ОДЗ производной, но входит в ОДЗ функции $\sqrt{x}$.

Функция $f$ называется *дифференцируемой на интервале*, если она имеет производную в каждой точке этого интервала.

**Теорема 15.4.** *Дифференцируемая функция непрерывна.*

В самом деле,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right] = f(a) + f'(a)\cdot 0 = f(a).$$

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором полуинтервале $[a; a+h_0)$, где $h_0 > 0$. *Правой производной* функции $f$ в точке $a$ называют правый предел

$$f'(a+0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Аналогично определяется *левая производная* в точке $a$:

$$f'(a-0) = \lim_{h\to 0-0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

**Пример 15.5.** Функция $y = |x|$ в нуле непрерывна, но не имеет производной. Правая производная в нуле равна 1, а левая производная в нуле равна $-1$. Для функции знака $y = \operatorname{sgn} x$, дополненной значением $y(0) = 1$, правая производная в нуле равна 0, а левая не существует. Если же положить $y(0) = -1$, то будет наоборот.

## XV.1. Техника дифференцирования.

**Д1.** *Производная константной функции равна нулю:* $(C)' = 0$.

**ТП1.** *Производная степенной функции*: $(x^m)' = mx^{m-1}$.

В частности,

$$(x)' = 1;\ (x^2)' = 2x;\ (1/x)' = -1/x^2;\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Для доказательства воспользуемся эквивалентностью $(1+\alpha(h))^m - 1 \sim m\alpha(h)$, где $\alpha(h) = h/x$ – б.м. при $h \to 0$, а $x$ фиксировано:

$$(x^m)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = x^m \lim_{h\to 0} \frac{(1+h/x)^m - 1}{h} = x^m \lim_{h\to 0} \frac{mh/x}{h} = mx^{m-1}.$$

**Д2. (линейность производной)**. *Производная суммы равна сумме производных:*

$$(f+g)' = f' + g'$$

*Постоянный множитель можно выносить за знак производной:*

$$(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$$

Доказательство.

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Аналогично проверяется вторая формула.

**Следствие.** *Производная многочлена имеет вид:*

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

**Д3. (правило Лейбница – производная произведения)**

$$(fg)' = f'g + g'f.$$

Доказательство.

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) \right] + f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Здесь мы применили правила "предел суммы" и "предел произведения", а также заменили $\lim_{h\to 0} g(x+h)$ на $g(x)$ в виду непрерывности функции $g(x)$ (см. теорему 15.4).

**Д4. (производная частного)**.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

В частности
$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

Действительно, дифференцируя левую и правую часть соотношения $g\cdot\frac{f}{g} = f$ с применением правила Лейбница, получим
$$g'\cdot\frac{f}{g} + g\cdot\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \;\Rightarrow\; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

**Пример 15.6.**
$$\left(\frac{x}{\sqrt{x-5}}\right)' = \frac{\sqrt{x-5} - \frac{x}{2\sqrt{x-5}}}{x-5} = \frac{x-10}{2\sqrt{(x-5)^3}}$$

### ТП2-ТП5. Производные тригонометрических функций

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x; \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Обоснуем формулу производной синуса:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cdot\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(h/2)\cdot\cos(x+h/2)}{h} = \cos x.$$

Здесь мы воспользовались эквивалентностью $\sin h/2 \sim h/2$, а также непрерывностью функции $\cos x$. Аналогично вычисляется производная косинуса.

Производная тангенса:
$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично вычисляется производная котангенса.

**Д5. Производная сложной функции.** *Пусть* $u = g(x)$ *и* $y = f(u)$ *– дифференцируемые функции* ($u$ назовем промежуточным аргументом). *Тогда*
$$[f(g(x))]'_x = f'_u(u)\cdot u'_x \tag{15.5}$$

Обоснуем эту формулу. Придадим приращение $\Delta x$ переменной $x$. Тогда $u(x)$ получит приращение $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$. Следовательно $f$ получит приращение $\Delta f = f(u+\Delta u) - f(u) = f(u(x+\Delta x)) - f(u(x))$. Далее:

$$[f(g(x))]'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'_u(u)\cdot u'_x.$$

Замена $\Delta x \to 0$ на $\Delta u \to 0$ возможна в силу непрерывности дифференцируемой функции $u(x)$.

Комбинируя (15.5) с уже известными табличными производными, получаем

$$((u(x))^n)' = nu(x)^{n-1}\cdot u'(x)$$

Например, $((3x-1)^5)' = 5(3x-1)^4\cdot 3 = 15(3x-1)^4$.

**Пример 15.7.** а) Вычислим $(\sin^2 x)'$, считая промежуточным аргументом $u = \sin x$:

$$(\sin^2 x)' = (u^2)'_u\cdot(\sin x)'_x = 2u\cdot\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

б) Вычислим $(\sqrt{x^2+1})'$, считая промежуточным аргументом $u = x^2+1$:

$$(\sqrt{x^2+1})'_x = (\sqrt{u})'_u\cdot(x^2+1)'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

**ТП6. Производная показательных функций**

$$(e^x)' = e^x;\quad (a^x)' = \ln a\cdot a^x$$

Докажем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\cdot 1 = e^x.$$

Далее, применяя формулу "производная сложной функции" , получим $(a^x)' = (e^{\ln ax})' = (e^{(\ln a)x})\cdot\ln a = \ln a\cdot a^x$.

**Пример 15.8.**

$$(xe^{2x})' = (1+2x)e^{2x};\quad (2^x)' = \ln 2\cdot 2^x.$$

**Д6 (Производная обратной функции).** Пусть $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – две взаимно обратные функции. Тогда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Действительно, из тождества $x = g(f(x))$ дифференцированием по $x$ с применением правила "производная сложной функции", следует соотношение $1 = f'_x \cdot g'_y = y'_x \cdot x'_y$, откуда получаем результат.

**ТП7. Производная логарифма** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

В самом деле, функция $x = e^y$ обратна к $y = \ln x$; применяем Д6:

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'_y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

**ТП8-ТП11**

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Функция $x = \operatorname{tg} y$ на интервале $y \in (-\pi/2; \pi/2))$ обратна к функции $y = \operatorname{arctg} x$, поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Таким же образом считаются и производные остальных обратных тригонометрических функций.

## XV.2. Неявно заданные функции.

Пусть для уравнения

$$F(x, y) = 0 \tag{15.6}$$

и отрезков $[a, b], [c, d]$ верно следующее: для любого $x \in [a, b]$ найдется единственное значение $y_x \in [c, d]$ (зависящее от $x$) такое, что $F(x, y_x) = 0$. Тогда получаем закон $f$, в силу которого любому $x \in [a, b]$ ставится в соответствие число $f(x)$ такое, что $F(x, f(x)) = 0$. В этом случае $f(x)$ – *функция, заданная неявно* уравнением (15.6) в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$.

**Пример 15.9.** Соотношение $x^2 + y^2 = 25$ в области $y \geq 0$ задает функцию $y = \sqrt{25 - x^2}$, а в области $y \leq 0$ – функцию $y = -\sqrt{25 - x^2}$. Продифференцировав соотношение $x^2 + y^2 = 25$ по $x$, считая $y = y(x)$, находим $y' = -x/y$. В точке $P(3;4)$ производная равна $-3/4$, и касательной будет $y - 4 = -3/4(x-3)$ или $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

**Метод дифференцирования неявно заданных функций.**

1. Дифференцируем (15.6) по $x$, считая $y = f(x)$ функцией аргумента $x$.

2. Из полученного соотношения выражаем $y'_x$ через $y$ и $x$.

Пусть результат будет $y' = g(x, y)$

3. Если даны координаты $(x_0, y_0)$ такие, что $y_0 = f(x_0)$, то $y'(x_0) = g(x_0, y_0)$.

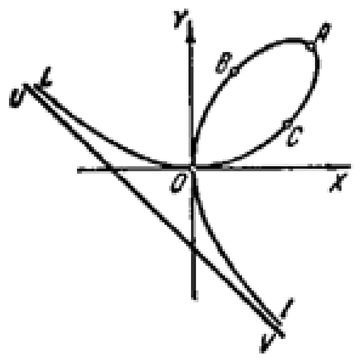



Рис. 22: Лист Декарта

**Пример 15.10. А.** Найдем производную функции, заданной неявно соотношением $x^3 + y^3 = 2xy$ (лист Декарта, см. рис. 22)) в окрестности точки (1;1). Дифференцируем данное соотношение по $x$, получим: $3x^2 + 3y^2y' = 2y + 2xy'$. Отсюда находим $y' = (2y - 3x^2)/(3y^2 - 2x)$. В точке $P(1;1)$ эта производная равна $-1$, и уравнение касательной будет иметь вид $y = 1 - 1(x-1) = -x + 2$

**Б.** Соотношение $y^6 - y - x^2 = 0$ задает одну функцию $y_1(x)$ в области $y \geq 1$ и другую функцию $y_2(x)$ в области $y \leq 0$. Заметим, что около точки $O(0,0)$ вторая функция приближенно равна $-x^2$. Эти две функции не являются элементарными функциями. В частности, они не выражаются в радикалах. Найдем $y'(x)$:

$$6y^5y' - y' - 2x = 0 \;\Rightarrow\; y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

Например, в точке $(\sqrt{2};-1)$ получаем: $y_2'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}/(-6-1) = -\frac{2\sqrt{2}}{7}$.

## XV.3. Параметрически заданные функции

Пусть
$$x = x(t);\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$
– кривая на плоскости, заданная параметрически. Предположим, что для любого $x \in [a,b]$ найдется единственное значение параметра $t_x \in [\alpha,\beta]$ такое, что $x = x(t_x)$. Тогда $y = y(t_x)$ называется *функцией (переменного $x$), заданной параметрически.*

**Пример 15.11.** Соотношения
$$x = 3\cos t;\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{15.7}$$
задают эллипс с полуосями 3 и 2, ибо из (15.7) следует $x^2/9 + y^2/4 = 1$. Для любого $x \in [0,3]$ найдется единственное число $t_x \in [0;\pi/2]$, а именно $t_x = \arccos x/3$ такое, что $x = 3\cos t_x$ . Тогда $y = 2\sin(\arccos x/3)$ – функция, заданная параметрически соотношением (15.7), которую в данном случае мы записали как элементарную функцию (другая запись той же функции: $y = 2\sqrt{1-(x/3)^2}$).

Имеет место следующая формула для производной функции, заданной параметрически:
$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}. \tag{15.8}$$
Действительно, дифференцируя $y = y(t_x)$ по $x$ как сложную функцию с промежуточным аргументом $t$ получаем $y_x' = y_t' \cdot (t_x)_x'$. Но $(t_x)_x' = 1/x_t'$ согласно правилу Д6 дифференцирования обратной функции. Подставляя, получим $y_x' = (y_t')/(x_t')$, что и требовалось доказать.

Найдем касательную к эллипсу $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ для значения $t = \pi/4$. Значения функций $x(\pi/4) = 3/\sqrt{2}; y(\pi/4) = \sqrt{2}$. Тогда
$$y_x' = \left[\frac{2\cos t}{-3\sin t}\right]_{t=\pi/4} = -\frac{2}{3} \ \Rightarrow\ y = \sqrt{2} - \frac{2}{3}(x - \frac{3}{\sqrt{2}}) \ \Rightarrow\ y = -\frac{2}{3}x + 2\sqrt{2}.$$

## XV.4. Логарифмическая производная.

Пусть задана дифференцируемая функция $y = f(x)$. Тогда

$$(\ln y)'_x = \frac{y'}{y}$$

называют *логарифмической производной* этой функции. Ясно, что $y' = y(\ln y)'$. Иногда бывает проще сначала найти логарифмическую производную. Например,

$$y = x^\alpha \;\Rightarrow\; \ln y = \alpha \ln x \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \;\Rightarrow\; y' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

**Пример 15.12.** Найдем производную функции $y = x^{\sin x}$, предварительно ее прологарифмировав:

$$(\ln y)' = (\sin x \ln x)' = \cos x \ln x - \frac{\sin x}{x}.$$

Отсюда следует:

$$y' = y\left(\cos x \ln x - \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x - \frac{\sin x}{x}\right).$$

Найдем производную функции $y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$:

$$y' = y(\ln y)' = y(2\ln(x+1) + 1/2\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x)' =$$

$$= y(2/(x+1) + 1/(2x-2) - 3/(x+4) - 1).$$

## XV.5. Дифференциал

Из определения производной $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ получаем равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $x \to a$. Тогда

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \tag{15.9}$$

– сумма линейной функции и б.м. высшего порядка малости по сравнению с $\Delta x$.

**Определение 15.13.** *Дифференциал функции* $f(x)$ есть линейная часть приращения:

$$df = f'(a) \cdot \Delta x \tag{15.10}$$

Вместо (15.10) допустима также запись $dy = f'(a) \cdot \Delta x$

**Геометрический смысл дифференциала:** дифференциал есть приращение ординаты касательной.

Для функции $f(x) = x$ из (15.10) получаем $dx = \Delta x$, поэтому $dy = f'(a)dx$ или, вычисляя дифференциал в произвольной точке $x$, получаем

$$dy = f'(x)dx \tag{15.11}$$

– дифференциальная форма, зависящая от двух переменных – $x, dx$. Отсюда, в частности, следует

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Отбрасывая в (15.9) б.м. высшего порядка малости, получаем $\Delta y \approx dy = f'(a)\Delta x$ или

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x \tag{15.12}$$

**Пример 15.14.** Вычислим $\sqrt{26}$ приближенно с помощью формулы (15.12):

$$\sqrt{26} = 5\sqrt{1 + 1/25} \approx 5(1 + 1/2 \cdot 1/25) = 5 + 0.1 = 5.1$$

## XV.6. Производные и дифференциалы высших порядков

Определим индукционно *производную n-го порядка*:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

и *дифференциал n-го порядка*

$$d^{n+1}f = d[d^n f]$$

Дифференциал вычисляется по переменной $x$, при этом переменная $dx$ считается константой. Например,

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = d(f'(x)) \cdot dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)dx^2$$

Аналогично, индукцией по n получаем

$$d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$$

◀ **15.15** (линейность производных и дифференциалов).

$$(\lambda f(x) + \mu g(x))^{(n)} = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)$$

$$d^n(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda d^n f + \mu d^n g$$

*для любых* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

**Предложение 15.16 (формула Лейбница).**

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \frac{n}{1}f^{(n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f^{(n-2)}g'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}f^{(n-3)}g''' + \dots + fg^{(n)}.$$

Доказательство – индукция по n. База индукции, случай n=1, доказан ранее. Индукционный переход обосновывается с помощью основного рекуррентного соотношения для биномиальных коэффициентов: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

**Пример 15.17.**

$$(x^3e^x)^{(5)} = 0\cdot e^x + 5\cdot 0\cdot e^x + C_5^2\cdot 6\cdot e^x + C_5^3 6xe^x + 5\cdot 3x^2e^x + x^3e^x = [60+60x+15x^2+x^3]e^x$$

## XV.7. Задачи

**15.18.** Найти производные а) $y = \frac{x\sqrt{2x-3}}{(x+1)^2\sqrt[3]{3x+1}}$; б) $y = x^{\sin x}$;
в) $y = \begin{cases} 3x-1 & \text{если } x < 0 \\ x^2 & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$; г) $ye^y = x$, $y'_x$?

**15.19.** Найти все производные функций а) $1 + 2x + 7x^2 - x^3$; б) $\sin 2x$.

**15.20** ([7], стр. 123). 1. Доказать, что функция $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y'' + 3y' + 2y = 0$, какие бы постоянные $C_1$, $C_2$ мы ни взяли.

2. Доказать, что функция $y = \sin(m \arcsin x)$ удовлетворяет уравнению $(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$.

**15.21.** Исследовать закон движения $x = A\sin\omega t$ (колебательный процесс). Здесь $A > 0$ – *амплитуда колебаний*, а $\omega$ – *(круговая) частота колебаний.* Каковы моменты остановки точки, какая наибольшая скорость и какое наибольшее ускорение?

**15.22.** Найти приближенно а) $\operatorname{tg} 45^0$; б) $\sqrt[4]{15,68}$ с помощью дифференциала

**15.23.** Написать уравнения касательных к кривой $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$ в точках а) $t = \pi/2$; б) $t = \pi$; в) $t = 3\pi/2$. Нарисовать эту кривую.

**15.24.** Доказать, что все производные функции $y = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ в точке 0 равны нулю.

**15.25.** Если ряд $E(x) = a_0 + xa_1 + x^2a_2 + \cdots$ сходится в любой точке $x$ из некоторого интервала $(-\delta; \delta)$, то его можно дифференцировать почленно, так же как и многочлен: $E'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots$. Доказательство этого чрезвычайно важного результата выходит за рамки данного пособия (см., например, [3]). Опираясь на сформулированный метод, отыскать ряд $E(x)$ такой, что $E'(x) = E(x)$. Сколько их?

**15.26.** Найти производную второго порядка функции,заданной неявно соотношением $x^3 + y^3 = 2xy$.

**15.27.** Функция $h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = y+1$ и начальному условию $h(0) = 0$. Предполагая, что функция разложима в сумму ряда (см. задачу 15.25), найти этот ряд.

# ЛЕКЦИЯ XVI
# Основные теоремы дифференциального исчисления

**Теорема 16.1 (Ферма).** *Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U$ точки $a$ и достигает в этой точке наибольшего (наименьшего) значения (среди всех значений $f(x), x \in U$). Если $f$ дифференцируема в точке $a$, то $f'(a) = 0$.*

*Доказательство.* Предположим, что в точке $a$ функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, и тем самым $\Delta f \leq 0$ для положительных и отрицательных $\Delta x$. Тогда для $x > a, x \in U$ имеем $\Delta x = x - a > 0$ и $\Delta f/\Delta x \leq 0$. Следовательно, $\lim_{x\to a+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$. Но этот правый предел совпадает с двусторонним пределом. Отсюда $f'(a) \leq 0$ (*). Аналогично, рассматривая левый предел, получим, что $\Delta f/\Delta x \geq 0$, и поэтому $f'(a) \geq 0$ (**). Из двух неравенств (*) и (**) следует равенство $f'(a) = 0$. Аналогично рассуждаем, если значение $f(a)$ наименьшее. □

**Теорема 16.2 (Ролля).** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале $(a, b)$, а в концах отрезка $[a, b]$ принимает одинаковые значения. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

*Доказательство.* Пусть $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ – точки в которых функция $f(x)$ достигает своих наименьшего и наибольшего значений (теорема Вейерштрасса 14.6). Если $x_{min}$ не является концевой точкой отрезка $[a, b]$, то $c = x_{min}$ – искомая точка по теореме Ферма. Аналогично рассуждаем в случае, когда $x_{max}$ не является концевой точкой. Итак, осталось разобрать случай, когда обе точки $x_{min}$, $x_{max}$ – концевые. Тогда в силу условия $f(a) = f(b)$ получаем, что $f(x_{min}) = f(x_{max}) = f(a) = f(b)$. Так как $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ для любого $x \in [a; b]$, то получаем, что функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$. В этом случае в качестве $c$ можно взять любую точку интервала $(a, b)$. □

**Следствие 16.3.** *Между корнями дифференцируемой функции лежит корень производной этой функции.*

Механический смысл теоремы Ролля заключается в том, что, если материальная точка, двигаясь на оси, возвратилась в исходную точку, то найдется момент времени, в котором ее мгновенная скорость была равна нулю. Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что если концы гладкой кривой лежат на одном и том же уровне относительно некоторой прямой, то найдется точка на этой кривой, касательная в которой параллельна заданной прямой.

**Теорема 16.4** **(Лагранжа).** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале $(a, b)$. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{16.1}$$

*или*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{16.2}$$

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ и применим к ней теорему Ролля. Это можно сделать, так как $g(a) = g(b) = 0$. Тогда получаем точку $c \in (a, b)$ с условием $g'(c) = 0$, т.е.

$$f'(c) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \;\Rightarrow\; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

**Следствие 16.5.** *Если $f'(x) = 0$ для любой точки интервала $x \in (a; b)$, то функция $f$ постоянна на этом интервале.*

*Доказательство.* Непрерывность функции $f$ обеспечена существованием производной (теорема 15.4). Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a; b)$ и обозначим $C = f(x_0)$. Для любой точки $x_1 \in (a; b)$, не совпадающей с $x_0$, найдется $c \in (x_0; x_1)$, для которой $f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0)$. Это число равно 0, так как $f'(c) = 0$ по условию. Отсюда $f(x_1) = f(x_0) = C$. Итак, $f(x) \equiv C$. □

Обобщим теорему Лагранжа:

**Теорема 16.6** **(Коши).** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале $(a, b)$, причем $g'(x) \neq 0$ для любой точки $x \in (a, b)$. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{16.3}$$

*Доказательство.* Заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$, иначе по теореме Ролля 16.2 нашлась бы точка $c \in (a;b)$, для которой $g'(c) = 0$, что противоречит условию. Следовательно корректно определена вспомогательная функция $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$. Применим к ней теорему Ролля. Это можно сделать, так как $h(a) = h(b) = 0$. Тогда получаем точку $c \in [a, b]$ с условием $h'(c) = 0$, т.е.

$$f'(c) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0 \ \Rightarrow\ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

**Замечание 16.7.** 1. Если в формулировке теоремы Коши предположить, что $g(b) \neq g(a)$ вместо $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$, то заключение теоремы перестает быть верным. Например, для $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $a = -1$, $b = 2$. Уравнение

$$\frac{f(2) - f(-1)}{g(2) - g(-1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8+1}{4-1} = \frac{3c^2}{2c} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \frac{3}{2}c \quad \Leftrightarrow \quad c = 2$$

не имеет решения на интервале $(-1, 2)$.

2. Теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши (случай $g(x) = x$). В доказательстве теоремы Коши мы ссылаемся на теорему Ролля.

**Теорема 16.8 (правило Лопиталя).** *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $a$ и $f(a) = g(a) = 0$. Предположим также, что $g'(x) \neq 0$ в некоторой достаточно малой проколотой окрестности точки $a$. Если существует предел отношения производных $f'(x)/g'(x)$ при $x \to a$, то существует предел отношения функций, и эти два предела совпадают:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{16.4}$$

**Теорема 16.9** (правило Лопиталя для $\infty$). *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы для всех достаточно больших $x$. Предположим также, что $g'(x) \neq 0$ для всех достаточно больших $x$. Если существует предел отношения производных $f'(x)/g'(x)$ при $x \to +\infty$, то существует предел отношения функций, и эти два предела совпадают:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

*Аналогичный результат имеет место и для $-\infty$.*

Доказательство теоремы 16.8 проведем в предположении, что существуют производные $f'(a), g'(a)$, и последняя не равна 0. Имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Полное доказательство правила Лопиталя см. в [5] или [3, §22].

**Пример 16.10.** Вычислим предел, пользуясь дважды правилом Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-0-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что $e^x-1-x \sim \frac{1}{2}x^2$. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{3x^2} = \frac{1}{2\cdot 3},$$

т.е. $e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2 \sim \frac{1}{6}x^3$. Этот процесс можно продолжать до бесконечности (см. разложение экспоненты в §XVI.3)

## XVI.1. Сравнение степени возрастания показательных, степенных и логарифмических функций.

Для любого $a>1$ и для любого натурального n имеет место соотношение

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = 0$$

а также соотношение

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^n x}{x} = 0$$

Для доказательства этих соотношений следует применить правило Лопиталя достаточное количество раз. Например,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Эти соотношения обобщаются на случай, когда n – любое действительное число. Например,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{e^x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot e^x} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\infty} = 0.$$

Будем писать $f(x) \ll g(x)$ для функций $f(x)$, $g(x)$, определенных на какой-либо окрестности $(C;+\infty)$ бесконечности, если $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. Предельные соотношения, отмеченные выше, означают, что

$$\ln^n x \ll \sqrt[k]{x} \ll x^k \ll a^x \quad (a>1).$$

## XVI.2. Формула Тейлора

**Теорема 16.11** (**локальная формула Тейлора**). *Пусть $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $a$ $n$ раз, и $n$-ая производная непрерывна в точке $a$. Тогда*

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o(x-a)^n$$

*Доказательство.* Применяем $n$ раз правило Лопиталя к пределу по базе $x\to a$ отношения

$$\frac{f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n]}{(x-a)^n}$$

и получаем 0. Применим первый раз правило Лопиталя, получим предел следующего отношения производных

$$\frac{f'(x)-[f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}]}{n(x-a)^{n-1}},$$

ввиду того, что $\frac{k}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}$. Далее можно либо продолжать процесс применения правила Лопиталя ($n-1$ раз), либо воспользоваться индукцией по $n$. Если идти первым путём, то в конце получаем предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)}{n!}$$

Он равен нулю, так как $n$-ая производная непрерывна в точке $a$. □

**Теорема 16.12** (**формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа**). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $a$ $n+1$ раз. Тогда для всех $x$, достаточно близких к $a$, найдется точка $c_x\in(x,a)$ такая, что*

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x), \quad (16.5)$$

*где*
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{16.6}$$
*В частности, если $M \geq \max_{c\in[a,x]} |f^{(n+1)}(c)|$, то имеет место следующая оценка остаточного члена:*
$$|R_n(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{16.7}$$

Частный случай формулы Тейлора – *формула Маклорена* получается при $a = 0$. Тогда при наличии $(n+1)$-ой производной в окрестности нуля, *для каждого достаточно малого $x$ найдется точка $c_x \in (0, x)$ такая, что*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{16.8}$$

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную функцию
$$\Phi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - ... - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{Q}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$
Здесь $x$ и $a$ фиксированы, а $t \in [x, a]$. Величина $Q$ определяется так, чтобы при подстановке $t = a$ получалось равенство. Тогда $\Phi(x) = \Phi(a) = 0$ и $\Phi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[x, a]$. Тогда существует точка $c_x \in (x, a)$ такая, что $\Phi'(c_x) = 0$. Имеем:
$$\Phi'(t) = 0 - f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - ... - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} +$$
$$+\frac{Q}{(n+1)!}(n+1)(x-t)^n = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{Q}{n!}(x-t)^n.$$
Подставляя сюда $t = c_x$, находим $Q = f^{(n+1)}(c_x)$. □

**XVI.3. Разложение по формуле Маклорена основных элементарных функций**. Начнем с экспоненты

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $\theta \in (0;1)$, и остаточный член $R_n = e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ стремится к нулю, если $n \to +\infty$ (при фиксированном $x$).

Теперь займемся разложением гармоник:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

где $|R_m(x)| \le \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$ и в случае синуса, и в случае косинуса.

Далее, взяв функцию-бином $f(x) = (1+x)^\alpha$, получим *биномиальное разложение Ньютона*:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}x^n + R_n(x), \tag{16.9}$$

причем остаточный член (в форме Коши) имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c_x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, \quad (c_x \in (0;x))$$

Рассмотрим частные случаи биномиального разложения (16.9).

*Случай 1.* $\alpha = m$ – натуральное число. Тогда $R_k(x) = 0$ при условии $k > m$, и мы получаем тождество (бином Ньютона):

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + x^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^k x^k.$$

*Случай 2.* $\alpha = -1$. Тогда

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$. Пользуясь этим разложением и тем, что $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

где $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, если $|x| < 1$. Пользуясь тем, что $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, получаем

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x)$$

где $\lim_{n\to+\infty} R_{2n+2}(x) = 0$, если $|x| < 1$.

## XVI.4. Задачи

**16.13.** Разложить по формуле Маклорена функции а) $\arcsin x$, б) $\ln\frac{1+x}{1-x}$, в) $\exp(-x^2)$.

**16.14.** Найти разложение функции $y = \operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до членов шестого порядка

**16.15.** Разложить многочлен $1+x-4x^2+2x^3+x^4$ по степеням $x+2$, пользуясь формулой Тейлора.

**16.16.** Пользуясь формулой Маклорена, вычислить с точностью до $10^{-4}$ значения а) $e$; б) $\sin 10^o$, в) $\ln 3/2$

# ЛЕКЦИЯ XVII
## Экстремумы. Монотонность

Функция $y = f(x)$ была названа возрастающей (убывающей) на множестве $X$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \leq x_2$, следует $f(x_1) \leq f(x_2)$ $((f(x_1) \geq f(x_2))$.

Функция $y = f(x)$ называется *строго возрастающей (строго убывающей) на множестве* $X$, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких, что $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ $((f(x_1) > f(x_2))$. Строго возрастающая или строго убывающая функция называется *строго монотонной.*

**Пример.** Функция $y = 1/x$ строго убывает на интервале $(-\infty; 0)$, а также на интервале $(0; +\infty)$. Однако на объединении этих интервалов, т.е. на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, эта функция не является убывающей.

Напомним, что *промежуток* – это либо интервал, либо полуинтервал, либо отрезок.

**Теорема 17.1.** *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $I \neq \emptyset$ и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для любой точки $x \in I$. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на $I$. Верно и обратное утверждение.*

*Более того, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любой точки $x \in I$, то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на $I$.*

*Доказательство.* Если $x_1 < x_2$, то по теореме Лагранжа найдется точка $c \in (x_1, x_2) \subseteq I$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. В силу того, что $f'(c) \geq 0$ и $x_2 - x_1 > 0$ имеем: $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, т.е. $f(x_2) \geq f(x_1)$. Утверждение "более того"доказывается также с заменой нестрогих неравенств на строгие.

Обратно, пусть дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на промежутке $I$. Возьмем точку $x \in I$ и предположим, что $h_0 > 0$ настолько мало, что $[x; x + h_0] \subseteq I$. Тогда для любого $h \in (x; x + h_0)$ приращение $\Delta f = f(x + h) - f(x) \geq 0$ ввиду возрастания. Тем самым и $\frac{\Delta f}{h} \geq 0$. Отсюда

$$f'(x) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

Аналогично разбирается случай $[x - h_0; x] \subseteq I$ для некоторого $h_0 > 0$. Так как для любой точки $x \in I$ имеет место либо первый случай, либо второй, либо оба вместе, то для возрастающей функции утверждение доказано. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке $I$, то следует перейти к функции $-f(x)$ и воспользоваться выше доказанным: $-f'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$. □

Заметим, что если дифференцируемая функция строго возрастает, то это не значит, что ее производная всюду строго больше нуля. Например, $y = x^3$ строго возрастает на всей числовой прямой, но $y'(0) = 0$.

**XVII.1. Экстремумы.** Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $a$. Точка $a$ называется *точкой локального максимума*, если $f(a) \geq f(x)$ для всех $x$ из достаточно малой окрестности точки $a$ (см. рис. 23). Если выполняется неравенство $f(a) \leq f(x)$ для всех $x$ из достаточно малой окрестности точки $a$, то $a$ называется *точкой локального минимума*. Точка локального минимума или локального максимума называется *точкой локального экстремума*.

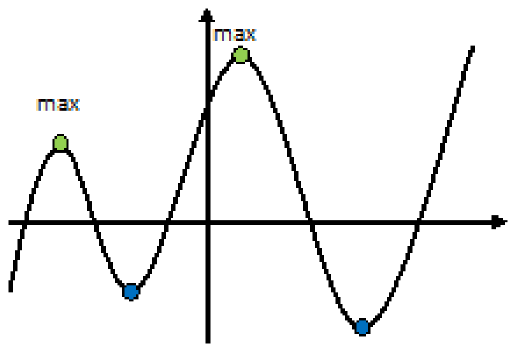



Рис. 23: Экстремумы

Заметим, что для константной функции любая точка будет точкой локального максимума и локального минимума одновременно. Для того, чтобы избавиться от такой, несколько неудобной позиции, можно определить *строгий локальный максимум* и *строгий локальный минимум* с заменой в определении выше нестрогих неравенств на строгие. Однако, далее мы не будем иметь дело со строгим вариантом

Точек локального экстремума на заданном отрезке у дифференцируемой функции может быть сколь угодно много (в частности, бесконечно много), как, например, для функции $x^2 \sin \frac{1}{x}$ на отрезке $[0; \varepsilon]$ (в нуле доопределяем нулем). Значений в этих точках может быть также сколь угодно много. Но наибольшее (наименьшее) значение функции на заданном множестве может быть только одно. Каждая точка интервала, в которой достигается наибольшее значение (наименьшее значение) на этом интервале, автоматически будет точкой локального максимума (локального минимума), но обратное неверно (см. рис. 23). Как следствие теоремы Ферма получаем

**Необходимое условие экстремума.** *Пусть $a$ – точка локального экстремума функции $f(x)$, причем эта функция определена в окрестности точки $a$ и имеет в этой точке производную. Тогда $f'(a) = 0$.*

Точка $a$ называется *критической точкой* функции $f(x)$, если производная $f'(a)$ существует и равна 0. Необходимое условие экстремума может быть сформулировано так: *для дифференцируемой функции любая точка локального экстремума является критической.* Обратное утверждение неверно, как показывает пример кубической параболы $y = x^3$, которая в нуле имеет нулевую производную, т.е. 0 - критическая точка, но эта точка не является экстремальной.

Как следствие теоремы 17.1 получаем

**Теорема 17.2 (первое достаточное условие экстремума).** *Пусть $f(x)$ непрерывна в окрестности точки $a$, дифференцируема в проколотой окрестности точки $a$, и производная $f'(x)$ при переходе через точку $a$ меняет знак. Тогда $a$ – точка экстремума. При этом $a$ – локальный максимум, если смена знака производной происходит с плюса на минус, и $a$ – локальный минимум, если знак меняется с минуса на плюс.*

Например, функция $y = \sqrt[3]{|x|}$ непрерывна всюду на числовой оси, и ее производная

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{3}x^{-2/3}, & \text{если } x > 0; \\ -\frac{1}{3}x^{-2/3}, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

меняет знак при переходе через ноль с минуса на плюс. Следовательно, $x = 0$ – точка локального (на самом деле глобального) минимума.

Функция $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой* на промежутке $I$, если она дифференцируема на этом промежутке и производная $f'(x)$ непрерывна на нем. Более общо: функция $f(x)$ называется n раз *непрерывно дифференцируемой* на промежутке $I$, если она имеет все производные $f^{(k)}$ ($k =$

$1, 2, \ldots, n$), и последняя производная $f^{(n)}$ непрерывна на промежутке $I$. Заметим, что остальные производные $f^{(k)}$, $k < n$ автоматически непрерывны в силу непрерывности дифференцируемой функции (теорема 15.4).

Функция называется *дважды непрерывно дифференцируемой*, если она имеет как первую, так и вторую производную, причем вторая производная непрерывна.

**Теорема 17.3 (второе достаточное условие экстремума).** *Пусть $a$ – критическая точка дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$. Если $f''(a) > 0$, то $a$ – локальный минимум. Если же $f''(a) < 0$, то $a$ – локальный максимум.*

*Доказательство.* Если $f''(a) > 0$, то $f''(x) > 0$ в некоторой достаточно малой окрестности точки $a$ (пользуемся устойчивостью знака непрерывной функции – $f''(x)$). Тогда по теореме 17.1 производная $f'(x)$ возрастает в этой окрестности. С учетом равенства $f'(a) = 0$ это значит, в частности, что $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $a$. Первое достаточное условие экстремума тогда влечет, что $a$ – локальный минимум. Второй случай разбирается аналогично. □

Более общий результат назовем третьим достаточным условием экстремума. Второе достаточное условие будет частным случаем ($n = 2$).

**Теорема 17.4.** *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $a$ $n$ раз, причем $n$-ая производная $f^{(n)}(a)$ непрерывна в точке $a$ и отлична от нуля. Предположим, что $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$.*

*Если $n$ нечетно, то $a$ не будет локальным экстремумом.*

*Если $n$ четно, и $f^{(n)}(a) > 0$, то $a$ – локальный минимум.*

*Если $n$ четно, и $f^{(n)}(a) < 0$, то $a$ – локальный максимум.*

*Доказательство.* Применим локальную формулу Тейлора:

$$f(x) = f(a) + 0 + \cdots + 0 + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \alpha(x) \cdot (x-a)^n,$$

где $\alpha(x)$ – б.м. относительно базы $x \to a$. Перепишем это соотношение следующим образом:

$$\Delta f = f(x) - f(a) = \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)\right] \cdot (x-a)^n.$$

Так как $f^{(n)}(a) \neq 0$, а $\alpha$ – б.м., то при достаточно малых $x - a$ знак суммы $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)$ совпадает со знаком числа $f^{(n)}(a)$. Если натуральное n нечетно, то $(x-a)^n$ меняет знак при переходе через точку $a$, поэтому приращение $\Delta f$ не является знакоопределенным в произвольно малой окрестности точки $a$, а, следовательно, $a$ не будет экстремальной точкой.

Если n четное, то $\operatorname{sgn}(x-a)^n = 1$ для $x \neq a$, поэтому $\operatorname{sgn}\Delta f = \operatorname{sgn} f^{(n)}(a)$. В случае $f^{(n)}(a) < 0$ получаем отрицательную определенность приращения $\Delta f$, тем самым $a$ – локальный максимум. В случае $f^{(n)}(a) > 0$ получаем положительную определенность $\Delta f$, тем самым $a$ – локальный минимум. □

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале $(a, b)$. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, которые существуют согласно теореме Вейерштрасса?

**Теорема 17.5.** *Предположим, что $x_1, x_2, x_3, \ldots$ – все критические точки функции $f(x)$ на интервале $(a, b)$. Тогда*

$$\max_{[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots\} \tag{17.1}$$

$$\min_{[a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots\}$$

*Доказательство.* Пусть в точке $c \in [a, b]$ функция $f(x)$ достигает наибольшего значения (см. теорему 14.6 Вейерштрасса). Если $c \neq a$ и $c \neq b$, т.е. $c \in (a, b)$, то $f'(c) = 0$ по теореме Ферма. Следовательно, $c = x_i$ для какого-либо $i$, и равенство (17.1) следует. Если же $c$ совпадает с одной из концевых точек отрезка $[a, b]$, то равенство (17.1) тривиально. □

## XVII.2. Задачи

**17.6.** Исследовать на монотонность и экстремумы функции

а) $x^n \exp(-x)$;

б) $x^n \ln x$;

в) $\frac{x^2+k}{x}$

**17.7.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = -3x^4 + 6x^2$ на отрезке $[-2, 2]$. В каких точках они достигаются?

**17.8.** Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума функции $y = x\sqrt{1-x^2}$

**17.9.** Русла двух рек в пределах некоторой области приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки его провести?

**17.10.** Доказать, что функция

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

дифференцируема всюду и на отрезке $[0; \varepsilon]$ имеет бесконечно много локальных максимумов так и локальных минимумов. Здесь $\varepsilon > 0$ произвольно, но фиксировано.

**17.11.** Пояснить, почему к функции

$$y = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

в точке 0 не применимо третье достаточное условие экстремума.

# ЛЕКЦИЯ XVIII
## Выпуклость. Асимптоты

**Определение 18.1.** График дифференцируемой на интервале $I$ функции $f(x)$ называется *выпуклым вверх* или просто *выпуклым* (*выпуклым вниз или вогнутым*), если он лежит ниже (выше) касательной, проведенной в любой точке (см. рис. 24).

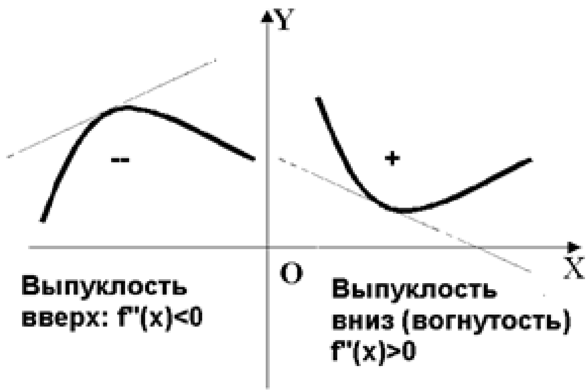



Рис. 24: Выпуклость и вогнутость графика функции

Так как уравнение касательной в точке $P(a, f(a))$ $(a \in I)$ имеет вид $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, то *условие выпуклости* будет таким:

$$f(x) \le f(a) + f'(a)(x-a), \quad \forall x, a \in I \tag{18.1}$$

*Условие вогнутости* будет следующим:

$$f(x) \ge f(a) + f'(a)(x-a), \quad \forall x, a \in I \tag{18.2}$$

**Теорема 18.2** (достаточное условие выпуклости). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $I$ и $f''(x) \ge 0$ для любой точки $x \in I$. Тогда график этой функции вогнут на интервале $I$. Если же $f''(x) \le 0$ для любой $x \in I$, то график функции $f(x)$ выпукл.*

*Доказательство.* Рассмотрим лишь случай $f''(x) \ge 0$. Докажем неравенство (18.2), убедившись, что разность левой и правой части неотрицательна:

$$\begin{aligned} &f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f'(c)(x-a) - f'(a)(x-a) = \\ &= (f'(c) - f'(a))(x-a) = f''(d)(c-d)(x-a) \end{aligned} \tag{18.3}$$

Здесь мы применили два раза теорему Лагранжа. Если $x > a$, то $c > d$. Если же $x < a$, то и $c < d$. В любом случае $(c-d)(x-a) > 0$. Тогда и все произведение (18.3) будет неотрицательным. $\square$

**Определение 18.3.** Точка, при переходе через которую график функции меняет выпуклость, называется *точкой перегиба.*

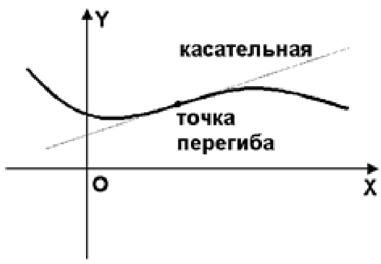



Рис. 25: Точка перегиба

Если $x = a$ – точка перегиба дифференцируемой функции $f(x)$, то график функции $f(x)$ лежит по обе стороны от касательной (или, иначе, переходит с одной стороны касательной на другую), проведенной к графику этой функции в точке $(a, f(a))$, см. рис. 25. Если же функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную (т.е. дважды непрерывно дифференцируема), то верно и обратное.

**Пример 18.4.** Исследуем на выпуклость функцию а) $y = x^3 - 12x$, б) $y = e^{-x^2}$ Для первой функции 0 – точка перегиба, до нее график выпукл, после – вогнут. Далее

$$(\exp(-x^2))' = -2x\exp(-x^2); \quad (\exp(-x^2))'' = -2\exp(-x^2) + 4x^2\exp(-x^2)$$

Вторая производная равна 0 в точках $\pm 1/\sqrt{2}$. Это будут точки перегиба. На интервалах $(-\infty; -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}; +\infty)$ график вогнут, а на интервале $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ выпукл.

## XVIII.1. Асимптоты

Прямая $\ell$ называется *асимптотой кривой* $\gamma$, если расстояние от точки $P \in \gamma$ до прямой $\ell$ стремиться к 0 при условии удаления точки $P$ на бесконечность (см. рис. 26). Заметим, что для удалении точки $P(x_P; y_P)$ на бесконечность

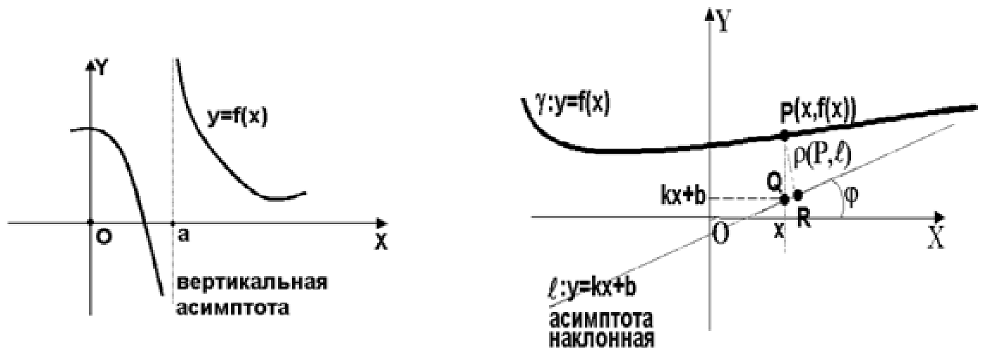



Рис. 26: Вертикальные и наклонные асимптоты

необходимо и достаточно, что бы одна из ее координат $x_P$ или $y_P$ стремилась к бесконечности.

Асимптоты графика функции $y = f(x)$ бывают вертикальные, т.е. задающиеся уравнением $x = a$, и наклонными, т.е. те прямые, которые задаются уравнением $y = kx + b$.

**Теорема 18.5.** *Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой тогда и только тогда, когда либо $\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$ , либо $\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ (см. рис. 26).*

*Прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$ на $+\infty$ (на $-\infty$ ), если и только, если существуют следующие пределы*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$$

*(Для случая $-\infty$ пределы следует вычислять по базе $x \to -\infty$)*

Доказательство. Обозначим через $d(P, \ell)$ расстояние от точки $P(x, f(x))$ до прямой $\ell : y = kx + b$, а через $\varphi$ обозначим угол между прямой $\ell$ и осью $Ox$. Заметим, $\varphi \neq \pi/2$ и поэтому $\cos\varphi \neq 0$. Тогда при $x \to +\infty$ имеют место эквивалентности:

$$d(P, \ell) = |f(x) - kx - b| \cos\varphi \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)-kx-b \to 0 \Leftrightarrow b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$$

Отсюда следует, что $\alpha(x) := f(x) - kx - b$ будет бесконечно малой величиной по базе $x \to +\infty$. Тогда

$$\frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - k \;\Rightarrow\; k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

## XVIII.2. Полное исследование функции

Полное исследование функции $f(x)$ включает в себя следующие этапы

1. Вычисление естественной области допустимых значений функции (ОДЗ($f$)).

2. Область значений функции $E(f)$. В частности, положительность (отрицательность) значений функции; ограниченность функции. Пересечение с осями координат

3. Симметрии графика функции (четность, нечетность, периодичность, симметрии относительно какой-либо точки или прямой).

4. Точки разрыва. Вычисление односторонних пределов в точках разрыва. Вертикальные асимптоты.

5. Исследование функции на монотонность с помощью первой производной. Нахождение локальных экстремумов.

6. Исследование функции на выпуклость и вогнутость по второй производной. Точки перегиба.

7. Вычисление наклонных асимптот.

**Пример 18.6.** Проведем полное исследование и построим график функции $y = \frac{x^2+1}{x}$.

1. ОДЗ($y$)$= (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. Решим уравнение $(x^2 + 1)/x = b$ относительно $x$. Имеем: $x_{1,2} = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 - 4}$, если $b^2 - 4 \geq 0$. Тем самым $E(y) = \left\{y \mid y^2 - 4 \geq 0\right\} = (-\infty; 2] \cup [2; +\infty)$.

3. Функция нечетна, ибо $y(-x) = y(x)$.

4. $a = 0$ – точка разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty; \ \lim_{x\to 0-0} \frac{x^2 + 1}{x} = -\infty$$

5. Производная $y' = 1 - 1/x^2$ больше 0 при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и меньше 0 на интервалах $(-1; 0)$ и $(0; 1)$. Вывод: $x = -1$ – локальный максимум, $x = 1$

– локальный минимум.

6. $y'' = 2/x^3$ больше 0 при $x > 0$ и меньше 0 при $x < 0$. Вывод: в левой полуплоскости график вогнут, в правой – выпукл.

7. $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$; $b = \lim_{x\to\pm\infty}((x^2+1)/x - x) = 0$. Итак, $y = x$ – двусторонняя асимптота.

**Пример 18.7.** Проведем полное исследование функции $y = xe^{-x}$.

1. ОДЗ($y$) -– вся числовая ось.

2. Вернемся этому пункту после п. 5. Пересечение с осью $Ox$ происходит только в начале координат.

3. График этой функции симметрий не имеет.

4. Функция непрерывна всюду. В частности, вертикальных асимптот нет.

5. Производная $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$ больше 0 при $x < 1$ и меньше 0 при $x > 1$. В первом интервале она возрастает вплоть до значения $y(1) = 1/e$, а затем убывает. Точка $P(1; 1/e)$ – глобальный максимум.

Как следствие п. 5 получаем, что $E(y) = (-\infty; 1/e]$.

6. Вторая производная $y'' = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$ больше 0 при $x > 2$ (вогнутость) и меньше 0 при $x < 2$ (выпуклость). Точка $Q(2; 2/e^2)$ есть точка перегиба. В ней производная равна $y'(2) = -1/e^2$.

7. $k = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = 0$; $b = \lim_{x\to+\infty} y = 0$. Итак, ось $Ox$ – асимптота на $+\infty$.

**Пример 18.8.** Проведем полное исследование функции $y = x^2 \ln x$.

1. ОДЗ($y$)$= (0; +\infty)$.

2. Пересечение с осью $Ox$ в точке $x = 1$. Область значений найдем в п. 5.

3. Симметрий график функции не имеет.

4. Вычислим предел $\lim_{x\to 0+0} x^2 \ln x$, используя правило Лопиталя и предварительно записав функцию как $\frac{\ln x}{1/x^2}$ ). Получаем 0.

5. $y' = 2x\ln x + x$. Критическая точка $x_1 = 1/\sqrt{e}$. В ней глобальный минимум, до нее функция убывает, а после нее – возрастает до $+\infty$. Следовательно, область значений функции – $(-\frac{1}{2e}; +\infty)$.

6. $y'' = 2\ln x + 3$. Точка перегиба $x_2 = 1/\sqrt{e^3}$, до нее график выпукл, после нее – вогнут.

7. Асимптот нет.

Особое исследование: найдем под каким углом находится график функции $y$ к оси $Ox$ в начале координат. Считаем производную в 0, доопределив функцию в нуле нулем. Тогда

$$y'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\ln h - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\ln h = 0$$

Следовательно, график функции касается оси $Ox$ в начале координат.

### XVIII.3. Задачи

**18.9.** Найти точки перегиба графика функции $y = (x-5)^{5/3} + 2$.

**18.10.** Найти асимптоты функции $y = \frac{x\operatorname{arctg} x + 2}{2x+3}$.

**18.11** (см. [1], 1097). Полностью исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ и построить график.

**18.12.** Полностью исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ и построить график.

**18.13.** Полностью исследовать функцию $y = (x-1)\sqrt{x}$ и построить график.

## Стандартные проверочные задачи.

**18.14.** а) Разложить число 2034 на простые множители.
б) Поделить 257 на $-13$ с остатком.
в) Сравнить дроби $3\frac{5}{7}$ и 3.71

**18.15.** Нарисовать графики функций а) $y = \frac{x}{x-1}$, б) $e^{x-1}$, в) $\sin 2x$, г) $2 + \ln x$, д) $|x-5|-3$ применяя геометрические преобразования к графикам основных элементарных функций.

**18.16.** Решить СЛАУ а) $\begin{cases} 3x - 2y = 4; \\ x + 5y = 7 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x + y - 2z = 0; \\ 2x + y + z = 4; \\ 3x + 2y + 3z = 8. \end{cases}$

**18.17.** Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицы а) $AB$, б) $A - 2B^\top$, в) $BA$.

**18.18.** Вычислить а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

**18.19.** Вычислить а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

**18.20.** Даны векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Найти а) $|\mathbf{a}|$, б) $\mathbf{a}^o$, в) направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}$, г) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, д) $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, е) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

**18.21.** Найти общее уравнение прямой $\ell$ на плоскости, если а) $\begin{cases} 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \perp \ell \\ P(1;5) \in \ell \end{cases}$, б) $\begin{cases} P \in \ell; \\ Q(-2;1) \in \ell \end{cases}$, в) $\begin{cases} P \in \ell; \\ \mathbf{a}(-4;1) \parallel \ell. \end{cases}$

**18.22.** Найти общее уравнение плоскости $\tau$, если а) $\begin{cases} 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} \perp \tau \\ P(1;5;-1) \in \tau \end{cases}$, б) $\begin{cases} P \in \tau \\ Q(-2;1;3) \in \tau \\ R(3;1;7) \in \tau \end{cases}$, в) $\begin{cases} P \in \tau; \\ \mathbf{a}(-4;1;3) \parallel \tau; \\ \mathbf{b}(1;-3;1) \parallel \tau. \end{cases}$

**18.23.** Найти каноническое и параметрическое уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $A(-1; 2; 5)$, $B(3; -2; 1)$.

**18.24.** Найти предел числовой последовательности а) $\lim \frac{2+3n+4n^2}{3+n+n^2}$, б) $\lim(\sqrt{n+5} - \sqrt{n})$, в) $\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$.

**18.25.** Найти предел функции а) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 7x}$, б) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$, в) $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+3)^3}{1+x+x^3}$.

**18.26.** Найти предел функции с помощью правила Лопиталя а) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{1-\cos x}$, б) $\lim_{x\to 0} x \ln x$ , в) $\lim_{x\to +\infty} \frac{(2x+3)^3}{3^x}$.

**18.27.** Вычислить производные функций а) $xe^{2x}$, б) $\frac{\sin 2x}{x}$, в) $\ln(x^2 + 1)$, г) $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$, д) $\arcsin(\cos x)$, е) $x\sqrt[3]{3x+1}$, ж) $\operatorname{tg} x/5$, з) $y = \begin{cases} 2 + x, & \text{если } x \geq 0; \\ x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

**18.28.** Исследовать на экстремум функции а) $x \ln x$, б) $\frac{x^2+4}{x}$, в) $x^3 - 12x + 1$.

**18.29.** Исследовать на выпуклость (вогнутость) и найти точки перегиба графика функций а) $\exp(-x^2)$, б) $\ln(x^2 + 1)$, в) $x^3 - x$.

**18.30.** Найти асимптоты графика функции а) $\sqrt{1 + x + x^2}$, б) $\frac{x^2+2x+3}{x+1}$, в) $x \operatorname{arctg} x$.

# Литература

[1] *Данко*, П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах : Ч1/Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. — 6-е изд. — Москва : Оникс 21 век : Мир и Образование, 2003. — 304 с.

[2] *Дубровин*, Н.И. Конспект лекций по алгебре./Н.И. Дубровин. Владимир. ВлГУ. 1997.

[3] *Дубровин*, Н.И. Математический анализ 1. Курс лекций./Н.И. Дубровин. Владимир 2017. ВлГУ.– 143с.

[4] *Дубровин*, Н. И. Задания к типовым расчетам по математике /Дубровин Н. И. Владимирский политехнический институт. Владимир. 1993 .— 64 с.

[5] *Зорич*, В.А. Математический анализ. Часть 1./В.А. Зорич. – М.: Фазис, 1997.—554с.

[6] *Кострикин*, А.И. Линейная алгебра и геометрия/ А.И. Кострикин, Ю.И. Манин – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 279с

[7] *Пискунов*, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т1./Пискунов Н. С.— Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2003 .— 415 с.

[8] *Фихтенгольц*, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1./Г.М. Фихтенгольц – М.: Наука, 1969. – 608 с.